Серия «Учебники»

Г. Г. Асеев, О. М. Абрамов,
Д. Э. Ситников

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Ростов-на-Дону, «Феникс»
Харьков, «Торсинг»
2003

ББК 22.176я73
А90

Книга издана при поддержке
Украинского литературного агентства
www.bookagency.com.ua
Т. 10 380 572 174-906

Рецензент:
доктор физико-математических наук, профессор,
директор Электрофизического центра НАН Украины
Клепиков В. Ф.

Асеев Г. Г., Абрамов О. М., Ситников Д. Э.
А90 Дискретная математика: Учебное пособие. — Ростов н/Д: «Феникс», Харьков: «Торсинг», 2003. — 144 с. (Серия «Учебники»)

ISBN 5-222-03775-4 (Феникс)
ISBN 966-693-257-1 (Торсинг)

В данном пособии значительное внимание уделено алгоритмическим методам при доказательствах теорем и решениях дискретных задач, методам математической логики, комбинаторному анализу и теории графов. Теоретический материал рассматривается на конкретных практических задачах и упражнениях.

Материал пособия соответствует типовым программам высших учебных заведений стран СНГ, изучающих дискретную математику как фундаментальную основу многих естественных наук.

Рассчитано на учащихся выпускных математических классов, студентов технических вузов и математических факультетов.

ISBN 5-222-03775-4 **ББК 22.176я73**
ISBN 966-693-257-1

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время интерес к дискретной математике неуклонно растет. Все больше в обязательную программу учебных заведений включаются курсы теории множеств, математической логики, комбинаторики, теории графов и их фрагменты. Специалисты в области современных компьютерных технологий уже осознали, что эти разделы математики являются фундаментом для построения настоятельно необходимой сейчас хорошей теории математического обеспечения информационных технических систем. Многие специалисты, казалось бы, далекие от математики, также начинают сознательно знакомиться с их содержанием. Авторы попытались увязать широту постановок задач дискретной математики с относительной простотой изложения, доступной для понимания лицам, имеющим среднее образование.

Настоящее учебное пособие состоит из четырех разделов.

В первом разделе излагается теоретико-множественная аксиоматика Цермело, на основании которой строится последующий материал учебного пособия. С позиций этой аксиоматики вводятся основные операции теории множеств и рассматриваются их свойства. Далее вводятся понятия отношения, функции, изучаются методы оценки мощностей множеств, возможности их построения и упорядочения. На основании проведенных исследований проводится водораздел между дискретным и непрерывным в основаниях математики.

Во втором разделе рассматриваются методы математической логики в их классическом изложении. Основу этих методов составляют булева алгебра и теория предикатов. Значительное внимание уделяется построению логического символизма, свойствам булевых функций и построению предикатов. Затрагиваются также вопросы теории доказательств в предметных областях на основании методов алгебры логики.

В третьем разделе, посвященном основам комбинаторного анализа, излагаются основные теоретические аспекты построения и анализа различных комбинаторных конфигураций: соединений, разбиений и композиций. При этом используется функциональный и алгоритмический подходы как наиболее общие с точки зрения математических построений и доказательств в данной области.

В четвертом разделе освещаются методы теории графов. В частности, даются ключевые понятия и определения этой теории, доказываются основные теоремы, рассматриваются различные алгебраические и теоретико-множественные способы представления графов, изучаются методы построением маршрутов, циклов, деревьев и раскраски графов, а также особенности применения этих методов в области информатики и вопросы построения алгоритмов на графах.

Разделы теоретического изложения материала подкреплены многочисленными практическими задачами и упражнениями.

1. ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЕ ОСНОВАНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

1.1. Понятия и аксиомы теории множеств

Основы теории множеств созданы математиками XIX века, которые поставили целью разработку оснований анализа. Начала этой теории заложил немецкий математик Георг Кантор. Ему принадлежит высказывание, которое можно рассматривать как интуитивное определение множества: «*Множество есть многое, мыслимое как единое*».

Такое определение множества потребовало введения трех символов.

Первый из них должен представлять множество как нечто «единое», т. е. являться представителем самого множества. В качестве такого символа принято применять любую прописную букву какого-либо алфавита: например, обозначать множества прописными буквами латинского алфавита A, B, ..., X или какого-либо другого по соглашению.

Второй символ должен представлять «многое», т. е. рассматриваться как элемент множества. В качестве этого символа принято использовать строчные буквы того же алфавита: a, b, ..., z.

Наконец, третий символ должен однозначно соотнести элемент множеству. В качестве соответствующего символа определен знак $\in$, который происходит от первой буквы греческого слова εστι (быть). Запись $x \in X$ определяет отношение: x есть элемент X. Для того чтобы указать, что x не есть элемент X, пишут $x \notin X$.

Опыт развития теории множеств на протяжении многих лет показал, что интуитивное определение понятия множества не является состоятельным, поскольку приводит к ряду внутренних противоречий теории — так называемым парадоксам. Так, например, широко известен парадокс Рассела: парикмахер (элемент x), проживающий в некоторой деревне, бреет всех тех и только тех жителей этой деревни, которые не бреются сами (пусть X — множество всех тех и только тех жителей данной деревни, которые не бреются сами). Вопрос: бреет ли парикмахер самого себя? То есть: $x \in X$ или $x \notin X$? Ясно, что получить логически непротиворечивый ответ на этот простой вопрос невозможно, поскольку, полагая, например, что $x \in X$, сразу приходим к противоречию: $x \notin X$, и обратно.

Этот и другие парадоксы теории множеств, которые определились уже к началу XX века, показали, что интуитивные определения и построения в математике не могут рассматриваться как основополагающие. Возникла необходимость определить множество так, чтобы затем при доказательствах теоретических построений не прибегать к привлечению интуитивных понятий.

Выход был найден в построении системы аксиом, которые, сами вынужденные быть построенными на интуитивном понятии множества, нигде более не допускали бы этого понятия при доказательствах теорем или в определениях.

Задача оказалась совсем не простой в связи со сложностью и необозримостью построений самой теории множеств.

К настоящему времени сложилось несколько аксиоматических систем теории множеств, в чем-то дополняющих, а в чем-то и исключающих друг друга в построениях теории. Одним из примеров является аксиома выбора, которую некоторые математики разделяют, а другие — не признают вообще. (Эта аксиома будет рассмотрена нами в конце главы.)

По оценкам экспертов, в настоящее время наиболее базовой из всех существующих является система Цермело (Z-система). Она состоит из семи аксиом, каждая из которых последовательно изучается в данном разделе. Отметим, что нумерация этих аксиом не во всех математических источниках совпадает. Мы же будем придерживаться в основном нумерации, принятой в работе [1].

В настоящем параграфе предлагается рассмотреть первые три аксиомы этой системы.

Аксиома объемности ($Z1$). Если все элементы множества A принадлежат также множеству B, а все элементы множества B принадлежат также множеству A, то $A = B$.

Рассмотрим $Z1$ подробнее.

Пусть все элементы множества Z принадлежат также множеству A. Тогда множество Z именуется *подмноже-*

ством А. Для подмножества Z множества A принято обозначение: $Z \subset A$. Символ $\subset$ именуется «*включение*». Если не исключается возможность ситуации, когда $Z = A$, то для того чтобы акцентировать на этом внимание, пишут $Z \subseteq A$, хотя это и не обязательно.

Принимая термин «подмножество», аксиому $Z1$ можно сформулировать следующим образом:

$Z1$: если $B \subseteq A$ и $A \subseteq B$, то $A = B$.

Рассмотрим, в чем состоит смысл этой аксиомы.

Пусть $A = \{a_1, a_2\}$ и $B = \{b_1, b_2\}$ — множества. В соответствии с введенным определением принадлежности элементов множествам имеем $a_1, a_2 \in A$ и $b_1, b_2 \in B$. Если при этом также выполнено $a_1, a_2 \in B$ и $b_1, b_2 \in A$, то на основании $Z1$ заключаем, что $A = B$.

В ряде задач часто возникает вопрос: как определить принадлежность элементов одного множества другому множеству? Эта принадлежность может быть известна по условию задачи, либо установлена на основании ее дополнительных исследований, либо не определена. Предостерегая от возможных ошибок, отметим, что символ принадлежности имеет более высокий статус, чем символ равенства. Поэтому из попарного равенства числовых значений элементов двух различных множеств еще не вытекает их взаимная принадлежность.

Предположим, например, что $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{1, 2, 3\}$ и ничего не известно о принадлежности элементов множества A множеству B и обратно. Тогда на основании $Z1$ возможно, что $A = B$, но не более. Нетрудно привести примеры таких ситуаций.

Пусть элементами множеств A, B являются тома собрания сочинений одного и того же классика, изданного большим тиражом и представленного своими номерами так, что: $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{1, 2, 3\}$. По смыслу здесь ясно, что как множество A, так и множество B представлены тремя томами *1*, *2* и *3* собраний сочинений некоторого классика. Пусть теперь известно, что множество A представляет часть домашней библиотеки, а множество B — часть библиотеки академии. Поскольку одни и те же тома данного классика принадлежат разным библиотекам, то условия аксиомы объемности в нашем примере не выполняются. Следовательно, сказать, что $A = B$ на основании $Z1$ нельзя, несмотря на то, что элементы множества A и множества B попарно имеют одни и те же числовые значения.

В другом примере положим, что в множествах A и B элементы *1*, *2*, *3* — те же тома из библиотеки академии, но выдаваемые в разное время двум различным читателям: первый читатель получал тома, представленные множеством A, а второй — множеством B. Тогда на основании аксиомы объемности заключаем, что $A = B$.

Заметим, что аксиома объемности определяет всего лишь *достаточные условия* равенства множеств. Предложить же аксиому, которая определила бы и *необходимые условия* равенства множеств в рамках данной теории без избежания ее внутренних противоречий, как показал опыт, возможным не представляется.

В связи с этим обратим внимание на, казалось бы, парадоксальный факт, что из равенства множеств вовсе не следует взаимная принадлежность элементов этих же множеств, т. е. аксиоматика Цермело предполагает существование равных множеств в тех случаях, когда условия аксиомы $Z1$ не имеют места. Таким образом, равенство либо неравенство множеств в некоторых постановках задач может быть просто объявлено. Но тогда и справедливость построения теории возлагается на самого исследователя. Следует, однако, иметь в виду, что объявить множества различными ($A \neq B$) в случае, когда условия аксиомы объемности выполняются, принимая систему Цермело, мы не имеем права.

Условимся везде далее в тексте, записывая $A = B$, считать, что множества A и B тождественно равны в смысле выполнения для них условий аксиомы $Z1$. Мы также будем говорить, что множества A и B *различны* исключительно в смысле невыполнения для них условий этой же аксиомы.

Из аксиомы объемности следует, что, если $A = \{a_1, a_2\}$, то $A = \{a_2, a_1\}$, поскольку как $a_1, a_2 \in A$, так и $a_2, a_1 \in A$. Таким образом, если порядок элементов не оговорен, то в силу $Z1$ любое множество рассматривается как *неупорядоченное*.

Пусть A, B — множества, $x \in A$ и $x \in B$. Тогда в силу аксиомы объемности

$$A = \{x, x, ...\} = \{x\} = B,$$

поскольку все элементы множества A принадлежат также множеству B, и обратно. Отметим, что в рассматриваемом обозначении множества A имеется некоторый «подвох»: на самом деле множество A содержит всего лишь один элемент, но записанный несколько раз подряд. Учитывая это, в теории множеств принято один и тот же элемент не повторять в записи дважды, т. е. в данном случае принято писать: $A = \{x\}$.

Рассмотрим теперь следующие примеры.

Даны множества $A = \{1, 1\}$ и $B = \{1\}$. Что можно сказать об их равенстве?

Выше мы установили, что равенство числовых значений элементов еще не гарантирует взаимной принадлежности элементов множествам. Поэтому для того, чтобы установить что-либо о равенстве данных множеств, потребуются дополнительные условия.

Пусть дополнительно к условию предыдущей задачи имеем: если для любого элемента $a \in A$ найдется такой элемент $b \in B$, что $a = b$, то $a \in B$ и $b \in A$.

В этом случае, применяя аксиому выбора, получим $A = \{1, 1\} = B = \{1\}$.

Пусть имеем другое дополнительное условие задачи. Согласно ему известно, что множество A представляет корни уравнения $(x - a_1)(x - a_2) = 0$, а множество B — корень уравнения $(x - b) = 0$.

Согласно основной теореме алгебры один и только один из корней уравнения второго порядка может одновременно быть корнем уравнения первого порядка. Следовательно, один и только один из элементов множества A может принадлежать множеству B. Поэтому в данной задаче установить равенство множеств A и B на основании аксиомы объемности не представляется возможным. Следует обратить внимание на то, что и оба элемента множества A различны, несмотря на равенство их числовых значений.

Аксиома пары (*Z2*). Для произвольных a и b существует множество, единственными элементами которого являются $\{a, b\}$.

Эта аксиома определяет способы построения множеств из элементов. То обстоятельство, что a и b заданы произвольно, не исключает ситуацию, когда a или b сами являются множествами.

Пусть $a = \{a_1, a_2\}$ и $b = \{b_1, b_2\}$. Следуя аксиоме пары, построим множество $A = \{a, b\} = \{\{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2\}\}$. Это множество определяется на основании аксиомы $Z1$ элементами a и b однозначно. Рассмотрим множество $B = \{a_1, a_2, b_1, b_2\}$, которое получено из A путем выбрасывания внутренних скобок. Множества A и B различны. Действительно, $\{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2\} \in B$ как подмножества B, но a_1, a_2, b_1, b_2 не могут принадлежать множеству A, поскольку элементами множества A являются множества, но не их элементы.

Введем понятие отношения порядка на множествах.

Множество

$$A = \langle a, b \rangle, \qquad (1.1)$$

где элементы связаны дополнительным условием: a предшествует b (либо b следует за a) называется *упорядоченной парой*. В общем случае, когда число элементов множества равно двум или более двух, вводится понятие *упорядоченного множества*. Этот класс множеств рассматривается в **1.6**.

Аксиома суммы ($Z3$). Для произвольных множеств A и B существует единственное множество C, элементами которого являются все элементы множества A и все элементы множества B и которое никаких других элементов больше не содержит.

Множество C именуется *суммой* или *объединением* множеств A и B. Символ операции объединения: $\cup$.

Из аксиомы $Z3$ следует, что сумму множеств A и B можно записать в виде

$$C = A \cup B. \qquad (1.2)$$

При этом из единственности C следует выполнение свойств:

$A \cup B = B \cup A$ — коммутативность и

$(A \cup B) \cup D = A \cup (B \cup D)$ — ассоциативность для любой тройки множеств, входящих в объединение.

Представляет интерес рассмотреть в качестве примеров три случая: когда множества A и B не имеют общих элементов, когда все элементы общие и когда только некоторые элементы этих множеств являются общими.

Если множества A и B не имеют общих элементов, их объединение строится наиболее просто. Пусть элементами множеств A и B являются точки некоторого одного и того же отрезка числовой оси: $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Тогда $C = A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Если у множеств A и B все элементы общие, например, в условиях предыдущего примера $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, то на основании *Z1*: $A \cup B = \{1, 2, 3\}$.

Пусть у множеств A и B общие только некоторые элементы. Положим $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, и пусть при этом известно, что принадлежат обоим множествам элементы со значениями *2* и *3*. В таком случае остальные элементы этих множеств необходимо отметить как принадлежащие разным множествам. Условимся, например, индексировать их символами исходных множеств. Тогда

$$C = A \cup B = \{1^{(A)}, 1^{(B)}, 2, 3, 4^{(A)}, 4^{(B)}\}.$$

Такая ситуация может иметь место, например, при слиянии таблиц, когда у таблиц A и B колонки 2 и 3 являются общими, а остальные — нет.

Для наглядности операцию объединения множеств можно интерпретировать диаграммой, предложенной Эйлером (рис. 1.1).

Если речь идет об объединении нескольких множеств, пишут: $\cup_\alpha A_\alpha$ и считают, что элемент, принадлежащий $\cup_\alpha A_\alpha$, принадлежит каждому из A_α.

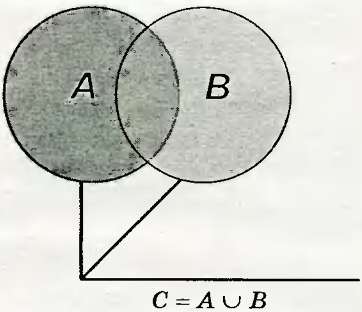


Рис. 1.1

Теорема 1.1. Для любых двух множеств A и B существует единственное множество C, составленное из тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству A, так и множеству B.

Доказательство. Существование общих элементов у множеств A и B допускается по определению принадлежности элемента множеству.

Если общий элемент единственен, то сразу же приходим к заключению теоремы.

Если имеем пару общих элементов, то для построения множества C воспользуемся аксиомой $Z2$.

Если общих элементов более двух, то, последовательно применяя к ним аксиому пары, получим систему множеств, каждое из которых содержит предыдущее множество и последующий общий элемент. Теперь для построения множества C достаточно воспользоваться аксиомой суммы, применяя ее ко всем множествам данной системы.

Если же A и B не имеют ни одного общего элемента, то множество C также определяется единственным образом — как множество, не содержащее ни одного элемента. Теорема доказана.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым*. Для него принят специальный символ: $\varnothing$. Иногда этот символ в литературных источниках заменяют символами **0** либо { }. Смысл их тот же.

Для произвольного семейства множеств A имеет место следующая теорема [1], которую мы приводим без доказательства.

Теорема 1.2. Для произвольного семейства множеств A существует единственное множество C, составленное из тех и только тех элементов, которые принадлежат всем множествам семейства A.

Множество C, определенное теоремами 1.1 и 1.2, называется *произведением* либо, что чаще, *пересечением* множеств, на которых оно построено. Это понятие столь же часто встречается в теории множеств, что и понятие суммы. Для обозначения операции пересечения множеств принят символ: $\cap$.

Операция пересечения множеств A и B записывается следующим образом:

$$C = A \cap B. \tag{1.3}$$

Из единственности множества пересечения вытекают свойства этой операции:

$A \cap B = B \cap A$ — коммутативность для любой пары и

$(A \cap B) \cap D = A \cap (B \cap D)$ — ассоциативность для любой тройки пересекающихся множеств.

Диаграмма Эйлера, поясняющая пересечение множеств, представлена на рис. 1.2.

Пусть A и B — произвольные множества. Построим множество тех элементов A, которые не принадлежат B. Тот факт, что такое множество существует и единственно, доказывается точно так же, как и в теореме **1.1**.

Полученное множество называется разностью множеств A и B. Для представления разности множеств принята операция, которая обозначается символами: «$-$» либо «$\setminus$».

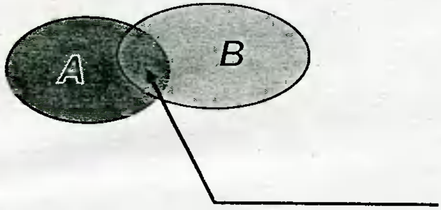


Рис. 1.2

Например, запись

$$C = A - B \tag{1.4}$$

или, что то же, $C = A \setminus B$ имеет смысл: «те элементы из A, что не в B».

Операция разности множеств, по своему определению, не ассоциативна и не коммутативна. В частности, из определения этой операции также следует, что должно быть выполнено

$$(A - B) \cap (B - A) = \varnothing. \tag{1.5}$$

Часто в рамках некоторой математической теории фиксируется множество, содержащее все другие множества как объекты этой теории. Такое множество называют *универсальным.* Обозначают его, как правило, наименованием данного фиксированного множества. Пусть I — любое универсальное множество и $A \subset I$. Построим разность $I - A$. Ясно, что $I - A \subset I$. Такая разность множеств именуется *дополнением*. Любое подмножество универсального множества называется его *собственным подмножеством.*

Существенный интерес в теории множеств представляет объединение множеств $(A - B) \cup (B - A)$. Это множество называется *симметрической разностью* множеств A и B. Для обозначения симметрической разности принят символ Δ, т. е.

$$A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A). \tag{1.6}$$

То, что эта операция коммутативна, вытекает непосредственно из ее определения формулой (1.6). Ассоциативность не очевидна, но также имеет место. Доказательство ассоциативности симметрической разности приведено, например, в [1, с. 23].

В рамках данной теории можно продолжать введение все новых операций над множествами. Однако перед этим естественно дать ответ на вопрос: не является ли уже введенная система операций избыточной? Избыточность будем понимать в смысле существования на множестве всех введенных операций непустого подмножества, через элементы которого можно выразить все остальные операции исходного множества.

Рассмотрим этот вопрос.

Теорема 1.3. Пусть A и B — любые множества. Тогда

$$A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B) \qquad (1.7)$$

и при этом множества $(A \Delta B)$ и $(A \cap B)$ не пересекаются.

Доказательство. Пусть имеем множества A и B. Общие элементы множеств A и B составляют множество $A \cap B$, которое единственно по теореме 1.1. Следовательно, те элементы, которые не принадлежат $A \cap B$, могут принадлежать лишь A, но не принадлежать B, либо — принадлежать B, но не принадлежать A. Первое из этих множеств определено нами как $A - B$, второе — как $B - A$, и они единственны. Таким образом, элементы, принадлежащие как множеству A, так и множеству B, можно представить единственным образом суммой трех множеств: $(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$.

С другой стороны, по аксиоме $Z3$, эта сумма равна объединению A и B:

$$(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = A \cup B.$$

Из определения разности и пересечения множеств имеем:

$$(A - B) \cap (A \cap B) = \varnothing,$$
$$(A - B) \cap (B - A) = \varnothing,$$
$$(A \cap B) \cap (B - A) = \varnothing.$$

На основании свойства коммутативности суммы множеств получим, что $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B) = (A \Delta B) \cup (A \cap B)$. Заметим еще, что для любых двух непересекающихся множеств их сумма равна симметрической разности. Следовательно,

$$A \cup B = (A \Delta B) \cup (A \cap B) = (A \Delta B) \Delta (A \cap B).$$

Теорема доказана.

Структура суммы множеств $A \cup B$ показана на рис. 1.3.

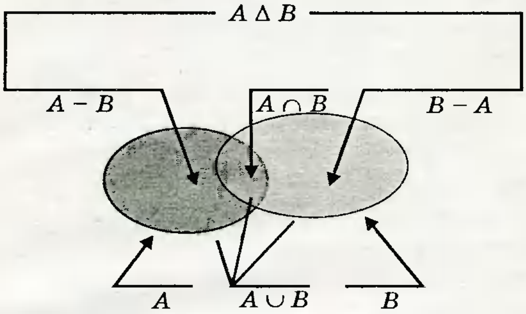


Рис. 1.3

Из теоремы 1.3 следует, что операция суммы множеств может быть единственным образом выражена через операции симметрической разности и пересечения.

Аналогично доказывается (проверьте это!) что,

$$A - B = A \Delta (A \cap B). \tag{1.8}$$

Из соотношений (1.7) и (1.8) видно, что все ранее введенные операции можно истолковать в терминах операции пересечения и симметрической разности.

Такой подход получил фундаментальное применение в различных областях математики: теории интегрирования, общей теории меры, теории вероятностей и других.

Основанием для его развития явилось понятие кольца множеств.

Непустая система множеств C называется *кольцом множеств*, если она замкнута относительно операций пересечения и симметрической разности:

если $A, B \in C$, то $A \Delta B \in C$;

если $A, B \in C$, то $A \cap B \in C$.

Ясно, что кольцо множеств ассоциативно, коммутативно и его *нулем* служит пустое множество.

В кольце может существовать единица. Под *единицей* понимают такое множество E, что $A \cap E = A$ для любого $A \in C$.

В частности, пусть $D \in C$ — множество, содержащее все другие элементы системы C, кроме самого себя, и не содержащее никаких других множеств. Тогда $A \cap D = A$ для любого $A \in C$ и, следовательно, $D = E$.

Для кольца с единицей введено понятие *алгебры множеств.*

Алгебраические вычисления в кольцах выполняются по правилам, аналогичным обычным арифметическим. При этом роль «суммы» играет операция Δ, а роль «произведения» — операция $\cap$.

В заключение параграфа отметим следующее. Рассмотренные выше операции объединения, пересечения, разности и симметрической разности множеств, полученные исключительно на основе понятия принадлежности элемента множеству и аксиом $Z1$, $Z2$ и $Z3$, составляют основной арсенал операций теории множеств. Вполне естественно возникает вопрос о более подробном исследовании их свойств. Такие исследования можно выполнять на языке теории множеств, привлекая введенные понятия и аксиомы. Однако было замечено, что многие рассуждения в процессе расширения исследований становятся все более громоздкими и малопонятными, если не ввести соответствующего *логического символизма.* Такой символизм в настоящее время построен средствами *алгебры логики.* Основания алгебры логики рассматриваются нами во второй главе. Можно рекомендовать предварительно изучить ее, если возникнет необходимость в более детальном исследовании свойств операций на множествах. В последующих разделах мы перейдем к рассмотрению вопросов, связанных непосредственно с построением множеств и изучением аксиом Z-системы.

1.2. Декартовы произведения, отношения и отношение эквивалентности

Пусть X и Y — произвольные множества. На основании аксиомы пары составим множество $X \times Y$ всех упорядоченных пар $\langle x, y\rangle$, где $x \in X$, $y \in Y$.

Поскольку существует не более одного множества, содержащего в качестве элементов все пары $\langle x, y\rangle$, и только такие пары, то множество $X \times Y$ определено ими однозначно:

$$X \times Y = \{\langle x, y\rangle : x \in X,\ y \in Y\}. \tag{1.9}$$

Определенное в (1.9) множество именуется *декартовым произведением* множеств X и Y.

В частности, не исключается случай, когда для каждого элемента множества X найдется равный ему элемент множества Y и обратно. В таком случае декартово произведение именуется *декартовым квадратом* и обозначается X^2.

Удобно употреблять для декартовых произведений геометрический язык. Элементы множества $X \times Y$ называют *точками*, множества X и Y — *осями координат*, элементы x — *абсциссами*, а элементы y — *ординатами*.

Пусть, например, $X = \{1, 2, 3\}$ и $Y = \{1, 2\}$. Соответствующее декартово произведение

$$X \times Y = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3, 2\rangle\}.$$

Это множество можно интерпретировать графическим построением (рис. 1.4).

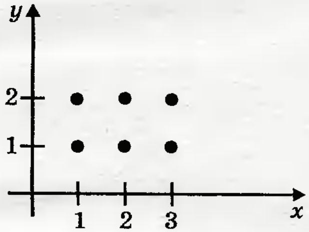


Рис. 1.4

Если задана система n множеств: $X_1, X_2, \ldots, X_n$, то *декартовым произведением* $X_1 \times X_2, \ldots, \times X_n$ множеств называется множество всех упорядоченных n-ок, составленных из элементов этих множеств:

$$X_1 \times X_2, \ldots, \times X = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle: x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \ldots x_n \in X_n\}.$$

Далее мы ограничимся рассмотрением, как правило, декартовых произведений пары множеств.

Отношениями называются любые непустые подмножества декартовых произведений.

Пусть R — отношение, т. е. $R \subset X \times Y$. Вместо $\langle x, y\rangle \in R$ чаще пишут xRy, что означает: «x находится в отношении R к y» или «отношение R имеет место между x и y». Отношение $\{\langle x, y\rangle: yRx\}$ называется обратным к R и обозначается R^c.

Рассмотрим примеры отношений.

Определим на множестве всех точек рис. 1.4 отношение R например следующим образом:

$$R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 3, 2\rangle\}. \qquad (1.10)$$

Этому отношению можно придавать самый различный смысл. Например, объявить элементы множества R как концы некоторой дуги. В этом случае xRy означает: «элементы x и y находятся в отношении друг к другу как координаты одного из концов некоторой кривой».

Можно, например, объявить, что множество точек, определенных отношением R, и только они, окрашены в красный цвет. Тогда запись xRy означает: «x и y — координаты красной точки». Остальные точки в нашем примере будут выделены отношением

$$R_1 = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 1\rangle\},$$

которое соответственно означает: «множество координат всех тех точек, которые не являются красными».

В отношения могут вступать объекты любой природы. Например, значениями множества X можно закодировать названия книжных издательств, а элементами множества Y — всех фирм некоторого региона, который занимается реализацией этих книг. Тогда отношению (1.10) можно придать смысл множества заключенных договоров между издательствами и торгующими фирмами.

Введем новые определения.

Левой областью D_l отношения R называют множество всех первых элементов пар, принадлежащих R, *правой областью* D_r — множество всех вторых элементов этих же пар.

На геометрическом языке D_l — *проекция отношения R на множество X*, а D_r — *проекция отношения R на множество Y*.

Сумму $D_l \cup D_r$ называют *полем* отношения R и обозначают $F(R)$.

Элементы левой и правой области отношения R, имеющие одинаковые значения, рассматриваются как принадлежащие обеим областям. Поэтому, в частности, для декартового квадрата X^2 имеем поле $F(R) = X$.

Важным и очень часто встречающимся типом отношения является отношение эквивалентности.

Отношением эквивалентности называется всякое отношение R, которое удовлетворяет трем условиям:

рефлексивности: xRx,

симметричности: если xRy, то и yRx,

транзитивности: если xRy и yRz, то и xRz

для любых $\langle x, y\rangle \in R$.

Пусть X — любое множество, представленное в виде семейства A непустых, непересекающихся подмножеств

$X_1, X_2, \dots X_n \subset X$ и таких, что $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n = X$. Такое семейство $A = \{X_1, X_2, \dots X_n\}$ называется *разбиением* множества X.

Например, если $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, то в качестве разбиения X можно принять семейство подмножеств $A = \{X_1, X_2, X_3\}$, где $X_1 = \{1, 2\}$, $X_2 = \{3, 4\}$, а $X_3 = \{5, 6\}$. Каждое их этих подмножеств не пусто, но пусто любое их попарное пересечение. Сумма же этих множеств составляет все X.

Теорема 1.4. Если $A = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ — разбиение множества X, то отношение

$$R_A = \cup_{i=1,n} R_{Ai}, \tag{1.11}$$

где $R_{Ai} = \{\langle x, y\rangle : x, y \in X_i\}$, есть отношение эквивалентности с полем X.

Доказательство. Построив декартовы квадраты на каждом из подмножеств X_i, получим всевозможные пары элементов $\langle x, y\rangle \in X_i^2$. Отсюда — выполнение условий рефлексивности, симметричности и транзитивности для любой пары элементов из отношения эквивалентности

$$R_{Ai} = \{\langle x, y\rangle : x, y \in X_i\}.$$

Действительно, рефлексивность $(xR_{Ai}x)$ имеет место, поскольку пара $\langle x, x\rangle \in X_i^2$; симметричность определяется тем, что если $\langle x, y\rangle \in X_i^2$, то и $\langle y, x\rangle \in X_i^2$; транзитивность также выполняется, поскольку если $\langle x, y\rangle \in X_i^2$ и $\langle y, z\rangle \in X_i^2$, то и $\langle x, z\rangle \in X_i^2$ для любых $x, y, z \in X^2$.

Таким образом, R_{Ai} есть отношение эквивалентности с полем X_i и $R_A = \cup_{i=1,n} R_{Ai}$.

Теорема 1.4 каждому разбиению множества X ставит в соответствие некоторое отношение эквивалентности.

Докажем обратное утверждение.

Теорема 1.5. Для каждого отношения эквивалентности R с непустым полем X существует такое разбиение A множества X, что $R = R_A$.

Доказательство. Пусть на X определено отношение эквивалентности R. Зафиксируем некоторый элемент $x_i \in X$ и построим множество X_i всех тех элементов y, для которых выполнено x_iRy.

Аналогично для некоторого другого элемента x_j построим множество X_j.

Покажем, что множества X_i и X_j либо не пересекаются, либо совпадают.

Пусть некоторый элемент x принадлежит как X_i, так и X_j. Тогда по построению X_i имеем x_iRx, а по построению X_j имеем x_jRx. Благодаря симметричности отношения R будет выполнено xRx_j, а вследствие транзитивности — x_iRx_j.

Пусть теперь c — произвольный элемент из X_i. Тогда cRx_i, а поскольку по доказанному выше x_iRx_j, то cRx_j и $c \in X_j$.

Аналогично доказывается, что всякий элемент $x \in X_j$ принадлежит X_i.

Таким образом, если X_i и X_j имеют хотя бы один общий элемент, то они совпадают. В противном случае $X_i \cap X_j$ пусто.

Отсюда следует, что R определяет некоторое разбиение A множества X, т. е. $R = R_A$, что и требовалось доказать.

Геометрический смысл этой теоремы состоит в следующем. Из примеров построения отношений на декартовом произведении видно, что одни и те же отношения (подмножества декартового квадрата) можно вводить различными способами. Так же обстоит дело и с отношениями эквивалентности. Теорема 1.5 утверждает, что каким бы способом ни было введено отношение эквивалентности R с непустым полем X, оно определяет некоторое разбиение A множества X и, вследствие этого, может быть представлено в виде (1.11), т. е. как R_A. При этом то обстоятельство, что R_A введено лишь на основании принадлежности элементов множеству и аксиом $Z1,...,Z3$, представляет существенную теоретическую ценность. Мы можем допустить широту различных способов построения отношения эквивалентности R, пользуясь лишь своей интуицией. Гарантом непротиворечивости такого построения аксиомам теории множеств, согласно теореме 1.5, является выполнение условий рефлексивности, симметричности и транзитивности. Их выполнение обеспечивает также и автоматическое выполнение $R = R_A$.

Если $R = R_A$, то множества, принадлежащие семейству A, называются *классами эквивалентности*. Поскольку классы, как множества разбиения, не пересекаются, каждый из них полностью определяется любым из элементов, принадлежащих данному классу. При этом все другие элементы могут быть получены на основе удовлетворения их свойствам рефлексивности, симметричности и транзитивности по отношению к выбранному элементу — *представителю* класса.

Класс эквивалентности, содержащий как представитель класса элемент x, обозначают x / R, а само семейство классов эквивалентности A — как X / R. Это семейство называется *фактором множества* X, или *фактор-множеством* X, по отношению к R.

При построении классов теорема 1.5 может оказаться более полезной в следующей формулировке.

Пусть на декартовом квадрате X^2 определено отношение эквивалентности

$$R_A = \cup_{i = 1,n} R_{Ai},$$

где $A = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ — разбиение множества X.

Если некоторая пара $\langle x, y\rangle \in R_A$, то найдется такое натуральное $k \le n$, что $\langle x, y\rangle \in R_{Ai}$ при $i = k$ и $\langle x, y\rangle \notin R_{Ai}$ при $i \ne k$.

Согласно формулировке, любая пара элементов, находящихся в отношении R_A, может принадлежать одному и только одному из классов этого отношения.

Рассмотрим некоторые примеры отношений эквивалентности.

Предположим, что X представляет множество заказанных библиотекой книг, которые получены ею в течение календарного года из различных организаций. Введем отношение эквивалентности R следующим образом. Скажем, что книги x_1 и x_2 эквивалентны, если они имеют один и тот же тип. Будем считать, что определено следующее множество типов: учебные, научные, научно-популярные и технические издания. Рефлексивность, симметричность и транзитивность здесь очевидны. Данное отношение разбивает все множество полученных библиотекой за год книг на классы эквивалентных элементов. Этих классов столько же, сколько и типов: в данном случае — четыре. Полем R является все множество X.

Фактор-множество определится так:

$$X / R = \{X_1, X_2, X_3, X_4\},$$

где X_1 — все учебные издания, X_2 — все научные издания, X_3 — все научно-популярные издания, X_4 — все технические издания.

Пусть $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ представляет множество фирм, выпускающих продукты производственной деятельности. Каждая из них выпускает различные продукты: $P = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$. Построим декартово произведение $X \times P$. Элементы этого декартового произведения условимся обозначать $x_i \cdot p_j$: (p_j — продукт фирмы x_i). Определим на $X \times P$ отношение эквивалентности. Скажем, что элементы $x_i \cdot p_j$ и $x_k \cdot p_l$ эквивалентны, если выпускается один и тот же продукт: ($p_j = p_l$). Рефлексивность, транзитивность и симметричность здесь очевидны. Классов столько, сколько различных продуктов выпускается всеми фирмами. Их совокупность представляет фактор-множество $X \times P / R$. Если выйти за рамки нашей задачи, каждый класс эквивалентности может представлять интерес с точки зрения анализа цен и качества изготовляемой продукции. Полем отношения R является все $X \times P$.

Рассмотрим еще пример, когда полем отношения эквивалентности является не все X, а подмножество X.

Пусть $X = \{1, 2, ..., 10\}$. Определим отношение эквивалентности. Скажем, что x_1 и x_2 эквивалентны, если $x_1 \bmod 2 = x_2 \bmod 2 = 0$. (Выражение $a \bmod b$ означает: «остаток от деления a на b».) Проверим выполнение условий рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Рефлексивность выполняется, ибо $x_1 \bmod 2 = x_2 \bmod 2 = 0$ для любых четных и только четных $x_1 = x_2 \in X$.

Симметричность также выполняется, так как если $x_1 \bmod 2 = x_2 \bmod 2 = 0$, то и $x_2 \bmod 2 = x_1 \bmod 2 = 0$ для любых четных и только четных $x_1 = x_2 \in X$.

Аналогично проверяется выполнение транзитивности, когда любые $x_1, x_2 \in X$ четны и только четны.

Следовательно, введенное отношение R есть отношение эквивалентности. Полем $F(R)$ этого отношения является множество четных чисел, принадлежащих X. Для данного примера это поле представляет единственный класс — четные числа множества X. Подмножество нечетных чисел множества X никаким классом четных чисел являться не может. Оно представляет всего лишь дополнение $F(R)$ до всего X.

Рассмотрим пример отношения, которое не является отношением эквивалентности. Пусть на декартовом квадрате введено отношение $x < y$. Такое отношение не может являться отношением эквивалентности хотя бы по одной из следующих причин. Рефлексивность не выполняется, поскольку x не может быть меньше самого себя. Симметричность также не имеет места: если $x < y$, то y никак не может быть меньше x. Легко видеть, что отношение $x < y$ транзитивно, но, как следует из определения отношения эквивалентности, лишь этого недостаточно.

1.3. Понятия образа, прообраза, функции и отображения на конечном множестве. Аксиома выделения

Рассмотрим декартово произведение множеств A и B. Пусть на $A \times B$ определено некоторое отношение R. Пусть также D_l и D_r — левая и правая части этого отношения. Определим некоторое подмножество $X \subset D_l$ и построим подмножество $Y \subset D_r$ как множество всех тех вторых элементов пар $\langle x, y \rangle \in R$, для которых $x \in X$. Множество Y называют *образом* множества X при отношении R.

Для образа применяют специальное обозначение: $R^1(X)$. В нашей постановке $R^1(X) = Y$.

Пусть $Y \subset D_r$. Определим подмножество $X^c \in D_l$ как множество всех тех первых элементов пар $\langle x, y \rangle \in R$, для которых $y \in Y$. Множество X^c называют *прообразом* множества Y при отношении R. Прообраз обозначают символами $R^{-1}(Y)$.

На рис. 1.5 представлено отношение R, отмеченное символом «×», на декартовом произведении множеств $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

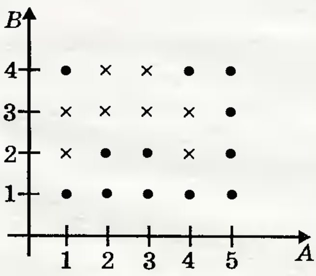


Рис. 1.5

Полагая, например, $X = \{2, 3\} \subset A$, получим $R^1(X) = \{3, 4\} = Y$. С другой стороны, полагая $Y = \{3, 4\}$, получим $X^c = R^{-1}(Y) = \{1, 2, 3, 4\}$. Из этого примера видно, что X, в общем случае, не равно X^c, т. е. $R^{-1}(Y) \neq X$.

Отношение $R \subset X \times Y$ называется *функцией*, если для любых $x \in X$ и $y_1, y_2 \in Y$ таких, что $(x, y_1) \in R$ и $(x, y_2) \in R$, следует, что $y_1 = y_2$.

Из этого определения, в частности, вытекает, что отношение R, представленное на рис.1.5, функцией не является. Примером функции на том же декартовом произведении является отношение R, представленное на рис.1.6.

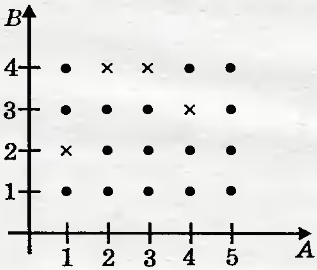


Рис. 1.6

Функции обычно обозначают малыми латинскими буквами f, g, h ... . Левая $D_l(f)$ и правая $D_r(f)$ области отношения f называются соответственно *областью определения* и *областью значений* функции f.

На рис. 1.6 областью определения отношения f является множество $D_l(f) = \{1, 2, 3, 4\}$, а областью значений — множество $D_r(f) = \{2, 3, 4\}$.

Применяется и другая терминология. Если $D_l(f) = X$, а $D_r(f) \subset Y$, то f называют *отображением* множества X *в* множество Y. Если же $D_r(f) = Y$, то f называют *отображением* множества X *на* множество Y или *сюръекцией*.

Если $D_l(f) = X$, то говорят, что f *определена на* X. Множество всех отображений из X в Y обозначают символами Y^X. Утверждение $f \in Y^X$ принято записывать также в виде $F{:}X \to Y$.

Из определения функции вытекает, что существует не более одного элемента $y \in Y$, такого, что xfy, т. е. элемент y определяется функцией однозначно. Его называют *значением* функции f для *аргумента* x и обозначают $f(x)$.

Пусть $D_l(f)$ — область определения и $D_r(f)$ — область значений функции f. Если для любых двух различных

x_1 и x_2 значения функции $f(x_1)$ и $f(x_2)$ также различны, то такая функция называется *инъективной*.

Функция f называется *биективной* или *взаимно-однозначной* функцией, если она сюръективна и инъективна.

Для взаимно-однозначных функций имеет место следующая теорема.

Теорема 1.6. Если функции f и g взаимно-однозначны, то функция $f(g(x))$ также взаимно-однозначна.

Доказательство. Действительно, если $f(g(x)) = f(g(x'))$, то $g(x) = g(x')$ и, соответственно, если $g(x) = g(x')$, то $x = x'$, что и требовалось доказать.

Поясним введенные определения геометрическими построениями. На рис. 1.7 представлена функция f общего вида. Ее значения отмечены символом ×. Из рисунка видно, что областью ее определения является множество $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, а областью значений — множество $Y = \{2, 3, 4\}$.

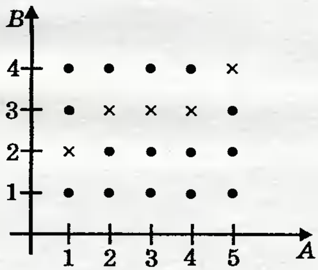


Рис. 1.7

Пример сюръективной, но не инъективной функции, представлен на рис. 1.8. Эта функция инъективной не является, поскольку элементы *3* и *5* множества X принимают одни и те же значения на множестве Y.

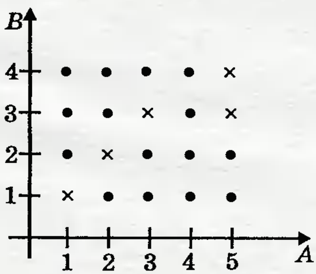


Рис. 1.8

Очевидно, что биекцию можно построить только на декартовом квадрате. Функция f, изображенная на рис. 1.9, является примером такого (и далеко не единственного) построения.

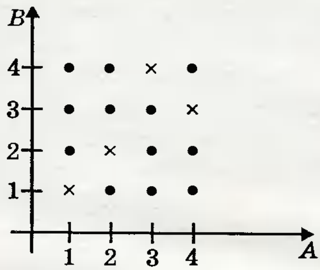


Рис. 1.9

Заметим, что любая биекция позволяет считать множества X — области определения и Y — области значений равными по числу элементов: для каждого значения аргумента имеем единственное значение функции и обратно. Эта точка зрения будет значительно шире представлена в последующих параграфах при изучении бесконечных множеств.

В заключение этого параграфа отметим, что понятие функции позволяет заменить аксиому пары более общей аксиомой — аксиомой выделения ($Z5$).

Аксиома выделения ($Z5$). Пусть X — произвольное множество, $x \in X$ и $\Phi(x)$ — функция со значениями на множестве $\{0, 1\}$. Тогда существует множество Z, для которого $x \in Z$ тогда и только тогда, когда $x \in X$ и $\Phi(x) = 1$.

Функции, которые могут принимать любое одно из двух значений $\{0, 1\}$, называются *бинарными*. В алгебре логики бинарные функции рассматриваются как *высказывательные функции*, или *предикаты*. В таком случае их значения интерпретируются соответственно как «ложь» или «истина».

Рассмотрим пример построения множества на основании аксиомы выделения.

Пусть $X \times Y$ — декартово произведение 4×4 элементов и $\langle x, y \rangle \in X \times Y$. Определим $\Phi((z)$, $(z = \langle x, y \rangle)$ следующим образом. Скажем, что

$$\Phi(z) = \begin{cases} 1, \text{ если } x = y, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Перебирая все элементы декартового квадрата, получим множество Z как подмножество $X \times Y$, определяющее единичное значение высказывательной функции $\Phi(z)$. В нашем примере получим $Z = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle\}$. Оно представляет линейную биекцию из X на Y.

Итак, аксиома выделения дает метод построения множеств. В частности, становится ясно, что аксиома пары есть весьма частный случай аксиомы выделения. Однако между ними столь велико число логических построений, что применение аксиомы пары в системе аксиом теории множеств методологически вполне оправдано.

1.4. Аксиомы степени и бесконечности. Мощности и кардинальные числа множеств

Аксиома степени ($Z4$). Для любого множества X существует множество всех его подмножеств $P(X)$.

Принимая этот факт как очевидный, тем не менее интересно проанализировать структуру $P(X)$.

Множество называется *конечным*, если число его элементов можно выразить каким-либо натуральным числом.

Для конечных множеств имеет место следующая теорема.

Теорема 1.7. Пусть $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ — множество, содержащее n элементов. Тогда множество всех подмножеств множества X биективно множеству всех бинарных функций, определенных на X, число которых 2^n.

Доказательство. Ясно, что ни одно из подмножеств X не может содержать больше элементов, чем X. Поставим в биективное соответствие каждому из подмножеств $Z \subset X$ бинарную функцию $\langle y_1, y_2, ..., y_n\rangle$, элементы которой определим следующим образом:

$$y_i = \begin{cases} 1, \text{ если } x_i \in Z, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Поскольку наше построение включает все подмножества от $\varnothing$ до X, то в результате получим последовательность всех бинарных функций со значениями от $\langle 0, 0, ..., 0\rangle$ до $\langle 1, 1, ..., 1\rangle$. Каждой такой функции поставим во взаимно-однозначное соответствие двоичное число от 0 до $11...1 = 2^n - 1$, где в равенстве слева имеем n единиц.

Следовательно, число всех бинарных функций будет 2^n, что и требовалось доказать.

Пусть, например, $A = \{1, 2, 3\}$. Тогда элементами множества всех подмножеств A будут:

$$\{ \{ \}, 1, 2, 3, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} \}.$$

В соответствии с этим построением имеем множество бинарных функций:

000, 100, 010, 001, 110, 101, 011, 111.

Отдавая дань заключению теоремы 1.7, множество всех подмножеств $P(X)$ конечного множества X обозначают 2^X.

Представляет несомненный интерес расширение теоремы 1.7 для множеств, содержащих бесконечное число элементов. Однако для этого необходимо вначале допустить само существование таких множеств. Ни одна из введенных ранее аксиом не утверждала, хотя и не отрицала этого. Поэтому до сих пор не ясно, можно ли рассматривать как множество всю непрерывную прямую, всю плоскость, тело и т. д. Очевидным представляется только следующий факт.

Аксиома бесконечности (*Z6*). Существует, по крайней мере, одно бесконечное множество — натуральный ряд чисел.

На основании этого можно приступить к построению множеств более сложной структуры: прямой, плоскости и т. д. Естественно, при этом возникает вопрос: как сравнивать эти множества по числу элементов?

В частности, формально пытаясь на основании аксиомы степени расширить теорему 1.7 на множество всех подмножеств натурального ряда, получим, что число элементов множества всех подмножеств натурального ряда

$$\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty.$$

Ясно, что этот тривиальный результат ничего не дает в сравнении множеств: исходного и полученного. Нужны более тонкие оценки структуры бесконечных множеств.

Известные оценки базируются на понятиях мощности и эквивалентности множеств.

Мощностью конечного множества называется число всех элементов данного множества. Мощность произвольного конечного множества X обозначается $|X|$.

Скажем, что два множества X и Y из семейства A (конечных или бесконечных) эквивалентны, если существует биекция $f: X \to Y$.

Это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно. Действительно, рефлексивность вытекает из существования тождественной функции f: $X \to X$, в случае $Y = X$. Симметричность следует из существования обратной функции для любой биекции f: из f: $X \to Y$ следует, что f^{-1}: $Y \to X$. Транзитивность определяется свойством суперпозиции биективных функций (теорема 1.6).

Следовательно, данное отношение разбивает все множества семейства A на классы эквивалентных элементов. Рассмотрим, в чем смысл этого отношения.

Для взаимно-однозначных функций имеет место следующая теорема.

Теорема 1.8. Если функция f взаимно однозначно отображает конечное множество X на Y, то условия $|X| = n$ и $|Y| = n$ эквивалентны.

Доказательство. Если $\{x_n\}$ — последовательность с n попарно различными членами и множеством значений X, то благодаря биективности функции f имеем $\{f(x_n)\}$ — последовательность с n попарно различными членами и множеством значений Y, что и требовалось доказать.

Таким образом, мощность — это то общее, что есть у различных конечных эквивалентных множеств.

Принципиально ничего противоречащего этому не обнаруживается и в случае бесконечного числа элементов у эквивалентных множеств. Для того чтобы определять мощности бесконечных множеств, введено понятие кардинальных чисел.

Кардинальным числом называется символ, определяющий количество элементов бесконечного множества.

Кардинальное число натурального ряда условились обозначать символом $\aleph_0$ (читается — алеф нуль).

Пусть для некоторого конечного множества X имеем $|X| = n$. Тогда, естественно, допустимо сравнение $n < \aleph_0$.

Обозначим $\aleph$ — кардинальное число множества всех подмножеств натурального ряда. Расширяя теорему 1.7 на натуральный ряд, получим, что $\aleph = 2^{\aleph_0}$.

Возникает вопрос: $\aleph = \aleph_0$ или $\aleph > \aleph_0$? Если $\aleph > \aleph_0$, то мощность натурального ряда меньше, чем мощность множества всех его подмножеств, и мы, во-первых, имеем способ построения более мощных множеств, переходя от X к $P(X)$, а во-вторых, создаются предпосылки построения шкалы мощностей, в том числе бесконечных множеств. Решение этих вопросов рассматривается ниже.

1.5. Счетные и континуальные множества

Вначале сравним мощности некоторых известных множеств. Пусть имеем множество всех положительных целых четных чисел {2, 4, 6, ...}. Для того чтобы установить биекцию между этим множеством и натуральным рядом, занумеруем элементы множества четных чисел по следующей схеме:

$$\begin{matrix} 2, & 4, & 6, & 8, & \dots \\ 1, & 2, & 3, & 4, & \dots \end{matrix}$$

Биекция устанавливается соотношением $k = 2n$, где k — значение элемента множества четных чисел, а n — значение элемента натурального ряда.

Мы видим, что мощности этих множеств равны, несмотря на то что положительные четные числа составляют подмножество натурального ряда.

Попытаемся установить биекцию между натуральными и целыми числами. Для этого перепишем ряд целых чисел в следующем виде:

$$0, -1, 1, -2, 2, \dots$$

Очевидно, что каждому члену этого ряда можно поставить во взаимно-однозначное соответствие натуральное число по схеме:

$$\begin{matrix} 0, & -1, & 1, & -2, & 2, & \dots \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \dots \end{matrix}$$

Таким образом устанавливается эквивалентность между целыми и натуральными числами.

Покажем далее, что мощность множества всех рациональных чисел также равна $\aleph_0$.

Известно, что всякое рациональное число q можно представить в виде несократимой дроби: $q = m / n$, где m, n — целые числа. Назовем сумму $|m| + n$ высотой рационального числа q. Например, высоту 1 имеют только число $0 = 0 / 1$. Высоту 2 имеют только числа $1 / 1$ и $-1 / 1$. Высоту 3 имеют $2 / 1$, $1 / 2$, $-2 / 1$ и $-1 / 2$. Ясно, что число чисел данной высоты конечно. Поэтому можно занумеровать все рациональные числа по возрастанию высоты так, что и в пределах одной высоты каждое получит свой номер, например также по возрастанию. Тем самым устанавливается биекция между всеми рациональными и всеми натуральными числами.

Можно привести много других примеров эквивалентности множеств.

В частности, множество всех многочленов от одной переменной с целыми или рациональными коэффициентами биективно натуральному ряду.

Множество всех алгебраических чисел, т. е. корней многочленов с целыми коэффициентами, — также.

Вообще будем говорить, что множество *счетно*, если оно биективно сопоставлено натуральному ряду.

Докажем наиболее важные свойства счетных множеств.

Свойство 1. Всякое подмножество счетного множества конечно либо счетно.

Пусть A — счетное множество, а B — его подмножество. Занумеруем элементы A следующим образом: a_1, a_2, ..., a_n, ... Очевидно, если $B \subset A$, то для каждого элемента b_1, b_2, ..., b_n найдутся элементы из A. Если при этом n — конечно, то и мощность B также конечна. Иначе — мощность B равна $\aleph_0$.

Свойство 2. Сумма конечного или счетного множества счетных множеств счетна.

Пусть A_1, A_2, ... — счетные множества. Все элементы A_1, A_2, ... можно записать в виде следующей бесконечной таблицы:

$$
\begin{array}{lllll}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \ldots \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \ldots \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \ldots, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}
$$

где в i-ой строке стоят все элементы множества A_i.

Занумеруем эти элементы по диагоналям. При этом элементы, которые принадлежат одновременно нескольким множествам, будем нумеровать только один раз:

$$
\begin{tikzcd}
a_{11} \arrow[r] & a_{12} \arrow[dl] & a_{13} \arrow[r] & a_{14} \arrow[dl] & \\
a_{21} \arrow[d] & a_{22} \arrow[ur] & a_{23} \arrow[dl] & a_{24} & \ldots \\
a_{31} \arrow[ur] & a_{32} \arrow[dl] & a_{33} & a_{34} & \ldots \\
a_{41} \arrow[d] & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \ldots, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots &
\end{tikzcd}
$$

Тогда каждый элемент суммы получит свой номер. Тем самым устанавливается взаимно-однозначное соответствие между натуральным рядом и суммой конечного или счетного числа множеств.

Свойство 3. Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.

Пусть A — бесконечное множество. Тогда в нем найдется элемент a_1. Далее выбираем элемент a_2, отличный от a_1, и т. д. Этот процесс не может закончиться из-за нехватки элементов за конечное число шагов, поскольку A — бесконечно. Таким образом, получаем $B = \{a_1, a_2, \dots\} \subset A$.

Существуют ли несчетные множества?

Теорема 1.9. Множество действительных чисел, заключенных между нулем и единицей, несчетно.

Доказательство. Предположим, что получено счетное множество всех действительных чисел, заключенных на отрезке [0, 1]. Каждую десятичную цифру такого числа обозначим α_{ij}, где i — номер числа, а j — номер разряда этого же числа:

$$\begin{gathered}
a_1 = 0,\ \alpha_{11}\,\alpha_{12}\,\alpha_{13} \dots\ \alpha_{1n} \dots \\
a_2 = 0,\ \alpha_{21}\,\alpha_{22}\,\alpha_{23} \dots\ \alpha_{2n} \dots \\
\dots \\
a_n = 0,\ \alpha_{n1}\,\alpha_{n2}\,\alpha_{n3} \dots\ \alpha_{nn} \dots \\
\dots
\end{gathered}$$

Построим действительное число b по следующему правилу. Сначала запишем нуль и запятую. Затем возьмем число, получившее первый номер, и рассмотрим его первый десятичный знак. Если $\alpha_{11} = 1$, то положим $\beta_1 = 2$. В противном случае положим $\beta_1 = 1$. Аналогично вычислим β_2, рассматривая α_{22} числа a_2. Таким образом, переберем все числа.

В результате будет получено число b, которое не равно ни одному из чисел a_i. Оно отличается от первого числа хотя бы в первом знаке, от второго — во втором и т. д. Следовательно, наше предположение о том, что множество чисел на отрезке [0, 1] счетно, неверно.

Доказательство этой теоремы основано на *диагональной процедуре Кантора*, которая описана выше.

Мощность множества точек на отрезке [0, 1] обозначается $\hat{C}$ и именуется — *континуум.* Далее мы можем рассмотреть множество точек на полупрямой. Легко видеть, что мощность этого множества также равна $\hat{C}$, поскольку имеет место биекция : $-\ln[0, 1] = [0, \infty]$.

Таким образом, приходим к выводу о том, что отрезок $[0, 1]$ и полупрямая эквивалентны. Далее с помощью той же функции устанавливаем биекцию между полупрямой и прямой.

Несколько сложнее дело обстоит с квадратом. Известно доказательство того факта, что множества точек, принадлежащих квадрату и стороне квадрата, равномощны. Идея доказательства принадлежит Кантору и состоит в следующем. Пусть точка $A(x, y)$ принадлежит квадрату со стороной $[0, 1]$. Представим x и y в виде: $x = 0, x_1 x_2 x_3 ...$, $y = 0, y_1 y_2 y_3$, а затем каждой такой точке поставим в соответствие действительное число

$$a = x_1 y_1 x_2 y_2 x_3 y_3 ...$$

Ясно, что разным точкам квадрата соответствуют и разные действительные числа. Кантор показал, что обратное соответствие также имеет место.

Эта идея Кантора дает ключ к доказательству несчетности множества точек, принадлежащих кубу и любому другому n-мерному телу, когда n — конечно.

Обобщим теорему 1.7 на бесконечные множества.

Теорема 1.10. Мощность множества всех подмножеств натурального ряда равна мощности континуума: $\aleph = \hat{C}$.

Доказательство. Построим биективное соответствие между множеством всех подмножеств натурального ряда и всеми вещественными числами на полуинтервале $[0, 1)$. Для этого рассмотрим некоторое произвольное действительное число $0 \leq a < 1$. В двоичной системе счисления оно может быть представлено следующим образом:

$$a = 0, C_1 C_2 ... C_n ..., \tag{1.12}$$

где $C_1 C_2 ... C_n ...$ — двоичные цифры представления числа a.

В частности, минимальному числу 0 — ставится в соответствие значение $a = 0, 0\ 0 ... 0 ...$, а максимальному 1 — ставится в соответствие значение $a = 0, 1\ 1 ... 1 ...$. Все остальные числа занимают промежуточные значения.

Для построения нашего соответствия разобьем множество всех подмножеств натурального ряда на два класса: класс A, для которого дополнение конечно, и класс B, для которого дополнение бесконечно. Очевидно, что класс A представляет счетное множество. Поставим всем подмножествам β класса B в соответствие множество всех вещественных чисел на полуинтервале $[0, 1)$. При этом будем учитывать то обстоятельство, что всякое рациональное число имеет в двоичной системе бинарное представление: с бесконечным числом нулей и бесконечным числом единиц. Поэтому при построении биекции, с целью устранения возможной неоднозначности, одно из таких представлений необходимо отбросить.

Сопоставим с каждым подмножеством β вещественное число α так, что если $n \in \beta \subset B$, то соответствующая цифра C_n в двоичном разложении (1.12) равна единице. В противном случае положим $C_n = 0$. Покажем, что такое соответствие биективно.

Действительно, класс B можно представить объединением двух непересекающихся подмножеств: первое из них биективно множеству всех рациональных чисел с бесконечным числом нулей после последней значащей единицы, второе — множеству всех рациональных чисел, представляемых бесконечными периодическими последовательностями с периодом повторения более единицы, и всех иррациональных чисел. При этом представление чисел с бесконечным числом единиц отбрасывается, иначе бы множество B имело конечное дополнение. Поскольку объединение всех рациональных и иррациональных чисел представляет все множество R, то отсюда и вытекает биекция установленного соответствия.

Согласно ранее доказанному, мощность множества всех действительных чисел на отрезке $[0, 1]$ равна мощности континуума. Следовательно, эту же мощность имеет и класс B натурального ряда. Таким образом, мощность всех подмножеств натурального ряда равна мощности множества $A \cup B$. Поскольку A всего лишь счетно, то мощность $A \cup B$ равна мощности континуума: $\aleph = \hat{C}$. Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что $\aleph_0 < \aleph$, поскольку мощность любого счетного множества необходимо меньше, чем любого несчетного.

1.6. Ординалы и трансфиниты. Аксиома выбора и континуум-гипотеза

В математике счетные множества применяются не только для того, чтобы ответить на вопрос «сколько?», но и на вопрос «какой по порядку?». Для того чтобы изучать порядок расположения элементов в множествах, вводится понятие упорядоченного множества. Различают частично упорядоченные, линейно упорядоченные и вполне упорядоченные множества.

Пусть X — произвольное множество. Отношение R, построенное на декартовом квадрате X^2 называют *частичной упорядоченностью*, если оно удовлетворяет условиям:

рефлексивности: aRa,

транзитивности: если aRb и bRc, то aRc,

антисимметричности: если aRb и bRa, то $a = b$.

Частичную упорядоченность принято обозначать символом $\leq$. Запись $a \leq b$ означает, что $\langle a, b\rangle \in R$. При этом элементами a и b могут служить объекты любой природы: числа, геометрические фигуры, слова и т. д. Смысл символа $\leq$ во всех случаях таков: «предшествует или равно». Например, «x_1» $\leq$ «x_2», если x_1 и x_2 — это фамилии студентов в групповом журнале.

В случае, когда $a \neq b$, пользуются символом $<$ и пишут $a < b$, что означает: «a строго подчинено b» или «a меньше b».

Если задана частичная упорядоченность R на X^2, то поле $F(R)$ называется *частично упорядоченным множеством*.

Построим пример частично упорядоченного множества.

Пусть дано множество $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Скажем, что $x \in X$ делит $y \in X$, если найдется такое целое k, что $kx = y$. С помощью непосредственной проверки убеждаемся, что это отношение рефлексивно, транзитивно и антисимметрично. Соответствующий этому случаю декартов квадрат представлен на рис. 1.10. На этом рисунке элементы, удовлетворяющие отношению R, выделены жирным шрифтом. Полем этого отношения является всё X.

Как видно из рис. 1.10, не все элементы x, y являются попарно сравнимыми. Если на декартовом квадрате с отношением R имеются такие пары $\langle x, y\rangle$, что $\langle x, y\rangle \notin R$ и $\langle y, x\rangle \notin R$, то говорят, что элементы x и y *не сравнимы* по отношению к R. Так, в рассмотренном выше примере не сравнимыми являются элементы 2, 3 и 3, 4. Возможность наличия несравнимых элементов и обусловливает понятие частично упорядоченного множества.

$$\begin{matrix} \langle 1,1\rangle & \langle 1,2\rangle & \langle 1,3\rangle & \langle 1,4\rangle \\ \langle 2,1\rangle & \langle 2,2\rangle & \langle 2,3\rangle & \langle 2,4\rangle \\ \langle 3,1\rangle & \langle 3,2\rangle & \langle 3,3\rangle & \langle 3,4\rangle \\ \langle 4,1\rangle & \langle 4,2\rangle & \langle 4,3\rangle & \langle 4,4\rangle \end{matrix}$$

Рис. 1.10

На одном и том же множестве можно вводить частичную упорядоченность различными способами. Например, определив на X естественный порядок $x \le y$, как «x меньше или равно y», имеем частичную упорядоченность, но без несравнимых элементов.

Если на частично упорядоченном множестве несравнимых элементов нет, то такое множество называется *линейно упорядоченным* или просто *упорядоченным.*

Примерами упорядоченных множеств являются множества натуральных, рациональных, целых, а также действительных чисел.

Линейно упорядоченные множества различают в зависимости от существования первого элемента. Например, упорядочивая натуральные и целые числа естественным порядком, видим, что у натурального ряда первый элемент имеется, а у множества целых чисел его нет.

Элемент x упорядоченного множества X называют *минимальным* (*максимальным*), если в X нет такого элемента y, что $y < x$ ($y > x$).

Упорядоченное множество называют *вполне упорядоченным,* если любое его непустое подмножество содержит минимальный элемент.

Если упорядоченное множество конечно, то оно, очевидно, и вполне упорядочено. Примером упорядоченного, но не вполне упорядоченного множества может служить отрезок [0, 1]. Само это множество содержит минимальный элемент. Однако его подмножество, состоящее из положительных чисел, минимального элемента не содержит.

Пусть A — подмножество множества X, упорядоченного отношением $\le$. Элемент $x \in X$ называется *верхней* *гранью* множества A в том и только в том случае, когда для любого $y \in A$ либо $y < x$, либо $y = x$.

Аналогично элемент $x \in X$ называется *нижней гранью* множества A в том и только в том случае, когда для любого $y \in A$ либо $y > x$, либо $y = x$.

Таким образом, у множества A может существовать много различных верхних и нижних граней.

Элемент $x \in X$ называется *точной верхней гранью* (*supremum*, или сокращенно *sup*) множества A тогда и только тогда, когда он является верхней гранью A и предшествует всем остальным верхним граням этого множества.

Элемент $x \in X$ называется *точной нижней гранью* (*infinum*, или сокращенно *inf*) множества A тогда и только тогда, когда он является нижней гранью A и ему предшествуют все остальные нижние грани этого множества.

Говорят, что два упорядоченных множества A и B имеют один и тот же *порядковый тип* или *ординал*, если между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие, сохраняющее порядок элементов.

Например, любые два отрезка имеют один и тот же порядковый тип. Сохраняет также порядок и отображение всей прямой на интервал. Отрезок же и прямая имеют разные порядковые типы. Если между ними и можно установить биекцию, она обязательно нарушит порядок: у отрезка есть начало и конец, а у прямой их нет.

Порядковые типы вполне упорядоченных множеств называют также *порядковыми числами* или — в случае бесконечных множеств — *трансфинитами* (от латинских слов *trans* — через и *finitae* — конечный).

Порядковое число линейного упорядоченного конечного множества однозначно определяется числом n его элементов и имеет то же обозначение.

Трансфинит натурального ряда принято обозначать ω.

Теорема 1.11. Упорядоченная сумма вполне упорядоченных множеств $X_1, X_2, \dots, X_n$ — вполне упорядоченное множество.

Доказательство. Пусть X — произвольное подмножество упорядоченной суммы вполне упорядоченных множеств $X_1, X_2, \dots, X_n$. Рассмотрим первое из множеств X_k, содержащее элементы из X. Пересечение $X \cap X_k$ является подмножеством вполне упорядоченного множества X_k и, следовательно, имеет первый элемент. Этот первый элемент будет и первым элементом X, что и требовалось доказать.

Из этой теоремы следует, что сумма порядковых чисел также является порядковым числом. Следующие примеры иллюстрируют возможность построения множеств с одним и тем же кардинальным числом, но различными порядковыми типами:

$1, 2, \ldots, m, 1, 2, \ldots, n, \ldots, \omega$ имеет трансфинит $m + \omega$,

$1, 2, \ldots, n, \ldots, \omega, 1, 2, \ldots, m$ имеет трансфинит $\omega + m$,

$1, 2, \ldots, n, \ldots, \omega, 1, 2, \ldots, n, \ldots, \omega$ имеет трансфинит 2ω.

Поступая аналогично, можно построить множества, упорядоченные по типам ω^2, ω^n, 2^ω, ω^ω и т. д.

Ясно, что если множества конечны, то их порядковые числа связаны отношением порядка. Аналогичная ситуация имеет место для вполне упорядоченных бесконечных множеств. Это отношение устанавливается теоремой, которую мы приводим без доказательства.

Теорема 1.12. Любые два порядковых числа ω_α и ω_β связаны между собой одним и только одним из соотношений:

$$\omega_\alpha < \omega_\beta,\ \ \omega_\alpha = \omega_\beta \text{ либо } \omega_\alpha > \omega_\beta.$$

Поскольку каждому порядковому числу отвечает определенная мощность, то из сравнения порядковых чисел вытекает и сравнимость мощностей вполне упорядоченных множеств. Рассмотрим примеры.

Трансфиниты всех счетных или конечных множеств образуют вполне упорядоченное множество. Его трансфинит обозначают ω_1. Убедимся в том, что множество всех счетных и конечных множеств несчетно. Действительно, если обозначить ω_1 — порядковое число всех счетных трансфинитов и предположить счетность числа всех трансфинитов, то $\omega_1 + 1$ — счетно. Это противоречит нашему предположению о том, что ω_1 следует за всеми трансфинитными числами конечной или счетной мощности.

Обозначим $\aleph_1$ — мощность, отвечающую трасфиниту ω_1, и покажем, что не существует мощности m, для которой

$$\aleph_0 < m < \aleph_1.$$

Действительно, если бы такая мощность существовала, то в множестве всех трансфинитов, предшествующих ω_1, имелось бы подмножество мощности m. Это подмножество вполне упорядочено и счетно. Но тогда его порядковый тип предшествовал бы ω_1, следуя за всеми счетными трансфинитами. В итоге имеем противоречие.

Приведенные рассуждения показывают, что мощности любых вполне упорядоченных множеств сравнимы между собой.

Возникает вопрос: существуют ли несравнимые мощности множеств?

Отрицательный ответ на этот вопрос строится на основании аксиомы выбора.

Аксиома выбора (*Z7*). Для каждого семейства A непустых непересекающихся множеств существует множество B, имеющее один и только один общий элемент с каждым из множеств $X \in A$.

Таким образом, предполагается существование некоторой функции выбора f, определяющей получение единственного общего элемента с каждым из множеств семейства A.

На основании этой аксиомы доказана следующая теорема.

Теорема 1.13 (Цермело). Всякое множество X может быть вполне упорядочено.

Доказательство. Расположим элементы данного непустого множества в трансфинитную последовательность

$$x_1, x_2, \ldots, x_\omega, \ldots, x_\xi, \ldots \quad (\xi < \Xi)$$

без повторений; ординал Ξ, являющийся длиной этой последовательности, будет определен в ходе ее построения.

Для построения этой последовательности применим функцию выбора $f(Y) \in Y$ для каждого непустого $Y \subseteq X$.

Положим $x_1 = f(X)$, $x_2 = f(X - \{x_1\})$, ..., $x_\omega = f(X - \{x_n: n \in \omega\})$ и вообще $x_\xi = f(X - \{x_\eta: \eta < \xi\})$ для всех ординалов ξ.

Такое построение применяем до тех пор, пока не получим равенство $\{x_\eta: \eta < \xi\} = X$. Тогда ординал ξ возьмем в качестве Ξ.

Поскольку для каждого множества ординалов существует ординал, превосходящий все ординалы, то ситуация, когда все ординалы исчерпаны, а множество всех построенных элементов x_η не совпадает с X, исключается. Этим доказательство теоремы Цермело завершается.

Изложенное доказательство (1904 г.), а следовательно, и аксиома выбора в свое время были опротестованы (без теоретических доказательств в чисто интуитивном плане) частью математиков. Как главный повод для критики выдвигался неконструктивный характер доказательства теоремы Цермело. Эмиль Борель, например, заметил, что «построение, которое нельзя описать, рассуждение, не могущее быть выполнено во всех его шагах до конца, все это находится вне науки».

Действительно, теорема Цермело никакой конкретной функции выбора не предлагает даже в простейшем случае — множества всех действительных чисел.

Однако другие математики, например Адамар, ничего недопустимого в этом не находили и видели в аксиоме выбора лишь высокий уровень математической абстракции.

Такая ситуация сохраняется и в настоящее время. Одни математики принимают аксиому выбора, а другие — нет.

Принимая аксиому выбора, возможно сравнивать мощности любых бесконечных множеств.

Проблема сравнения мощностей состоит в следующем. Для любой пары множеств X и Y, имеющих мощности $\aleph_X$ и $\aleph_Y$ соответственно, возможно одно и только одно из четырех соотношений:

A. Элементы множества X можно поставить в биективное соответствие с некоторой частью элементов множества Y. Тогда $\aleph_X \leq \aleph_Y$.
B. Элементы множества Y можно поставить в биективное соответствие с некоторой частью элементов множества X. Тогда $\aleph_Y \leq \aleph_X$.
C. Элементы множества X можно поставить в биективное соответствие с некоторой частью элементов множества Y, а элементы множества Y можно поставить в соответствие с некоторой частью элементов множества X. В этом случае, как утверждает теорема Кантора—Бернштейна [3], $\aleph_Y = \aleph_X$.
D. Ни A, ни B не имеют места. В этом случае мощности $\aleph_X$ и $\aleph_Y$ не сравнимы.

Из теоремы Цермело вытекает следствие о сравнении мощностей множеств.

Следствие теоремы Цермело. Для любых двух мощностей имеет место только одно из трех соотношений:

$$\aleph_X \leq \aleph_Y,\ \aleph_Y = \aleph_X \text{ или } \aleph_Y \leq \aleph_X.$$

Доказательство. Множества X и Y можно вполне упорядочить по теореме Цермело. Следовательно, соответствующие ординалы этих множеств сравнимы. Но тогда, тем более, сравнимы и кардинальные числа.

Таким образом, строится *бесконечный ряд алефов*

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \ldots .$$

При построении этого ряда возникает естественный вопрос: какой же их алефов соответствует мощности континуума $\aleph$?

Здесь существует всего лишь *континуум-гипотеза*, которая утверждает, что $\aleph = \aleph_1$.

Как показывают исследования последних лет, на основании аксиомы выбора не удается доказать или опровергнуть континуум-гипотезу. Возможно лишь, что $\aleph \geq \aleph_1$.

В заключение отметим, что множества и отношения на них является предметом изучения любой математической дисциплины. Исследования же дискретной математики проводятся на множествах мощности $\leq \aleph_0$. Из всего рассмотренного выше видно, что сюда относятся конечные либо счетные множества, изучению которых посвящены следующие разделы.

Задачи

1.1. Пусть универсальное множество $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Выписать элементы множества $M = (A - B) \cup (A \cap B)$, если

$$A = \{1, 3, 5\}, B = \{3, 4, 5\};$$
$$A = \{2, 4, 5\}, B = \{1, 4\};$$
$$A = \{1\}, B = \varnothing.$$

1.2. Пусть универсальное множество I состоит из целых чисел. Из каких элементов состоит множество $M = A \cap B$, если A состоит из чисел вида $4n$, а B — из чисел вида $3n$, где $n \in N$.

1.3. Пусть универсальное множество $I = \{a, b, c\}$. Выписать все подмножества этого множества.

1.4. Множества A, B и C представляют собой области плоскости, изображенной на рис. 1.11.

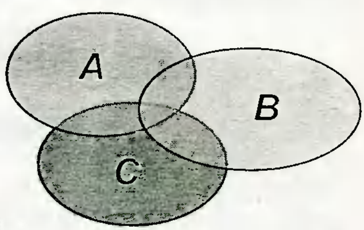


Рис. 1.11

Изобразить следующие множества:

$M = A \cup B$; $M = A \cap B \cap C$; $M = (A - B) - C$;

$M = A - (B - C)$; $M = A \cup (B \cap C)$.

1.5. В результате поиска в Интернете выданы адреса Web-страниц **www.cont1, www.cont2, www.cont3, www.st1, www.st2, www.st3, www.inf.ru, www.inf.au,** содержащих комбинацию ключевых слов «electronic_libraries». Известно, что страницы с адресами **www.cont1, www.cont3, www.st1, www.st2, www.inf.au** содержат информацию о книгах по техническим наукам, страницы **www.st1, www.st2, www.st3, www.inf.ru, www.inf.au** — сведения о периодических изданиях, адрес **www.inf.au** указывает на страницу, с информацией об электронных библиотеках Австралии. Найти множество всех адресов, указывающих на страницы, содержащие информацию о периодических изданиях по техническим наукам, исключая издания в Австралии. Дать теоретико-множественную интерпретацию задачи.

1.6. Сформулировать следующую задачу в терминах теории множеств.

Имеется набор ключевых слов для поиска в Интернете информации, связанной с современными средствами электронного документооборота. Из этих ключевых слов можно выделить слова, позволяющие найти Web-страницы, содержащие информацию о современных текстовых процессорах, современных средствах хранения документов, способах передачи электронных документов по каналам связи, и некоторые страницы со специфической информацией. Требуется выделить из всех ключевых слов такие, которые позволят находить страницы, не связанные с хранением и передачей документов, однако содержащие сведения о современных текстовых процессорах.

1.7. Выписать все элементы декартового произведения множеств A и B, если $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$.

1.8. Найти правую и левую область отношения

$$R = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7)\}.$$

1.9. Отношение $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$ определено на декартовом квадрате множества $A = \{1, 2, 3\}$. Доказать, что R — отношение эквивалентности. Выписать классы эквивалентности.

1.10. Является ли отношением эквивалентности отношение R, определенное следующим образом на декартовом квадрате множества натуральных чисел, отличных от единицы: $(x, y) \in R$, если и только если x и y имеют общие делители, отличные от единицы.

1.11. Привести пример рефлексивного отношения, которое не является симметричным и транзитивным.

1.12. Привести пример симметричного отношения, которое не является рефлексивным и транзитивным.

1.13. Привести пример транзитивного отношения, которое не является рефлексивным и симметричным.

1.14. Привести пример рефлексивного и симметричного отношения, которое не является транзитивным.

1.15. Привести пример рефлексивного и транзитивного отношения, которое не является симметричным.

1.16. Привести пример симметричного и транзитивного отношения, которое не является рефлексивным.

1.17. Является ли отношение $R = \{(1, a), (1, b), (2, a)\}$, определенное на декартовом произведении множеств $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\}$, функцией?

1.18. Найти образ отрезка $[1, 10]$ при отображении $y = \lg x$.

1.19. Найти прообраз отрезка $[-1, 1]$ при отображении $y = \sin(x)$.

1.20. Является ли функция $f(x) = x^2$ инъективной?

1.21. Является ли отношение $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)\}$, определенное на декартовом произведении множеств $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, функцией? Если да, то является ли данная функция сюръекцией, инъекцией?

1.22. Является ли отношение $R = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$, заданное на декартовом квадрате множества $A = \{1, 2, 3, 4\}$, биективным отображением?

1.23. Отношение R на множестве всех книг библиотеки определим следующим образом. Пара книг a и b принадлежит R, если и только если в этих книгах есть ссылки на одни и те же литературные источники. Является ли R a) рефлексивным отношением; b) симметричным отношением; c) отношением эквивалентности?

1.24. Отношение R на некотором множестве ключевых слов для поиска в Интернете определим следующим образом. Пара ключевых слов a и b принадлежит R, если и только если они начинаются с одного и того же символа. Является ли R отношением эквивалентности? Если да, то описать классы эквивалентности, индуцированные данным отношением.

1.25. Пусть отношение R задано на декартовом произведении множеств K и P, где K — множество ключевых слов, а P — множество Web-страниц. Пара (x, y) принадлежит R, если и только если ключевое слово x содержится на странице y. Является ли R функцией?

1.26. Пусть отношение R задано на декартовом произведении множеств B и P, где B — множество всех книг в книжном магазине, P — множество цен. Пара (x, y) принадлежит R, если и только если книга x имеет цену y. Является ли R функцией? Если да, то является ли данная функция сюръективной, инъективной?

1.27. Пусть отношение R задано на декартовом произведении множеств D и N, где D — множество всех документов, содержащихся в папке «Входящие», а N — множество всех номеров, служащих для регистрации этих документов. Является ли отношение R функцией? Если да, то является ли данная функция биекцией?

1.28. Установить взаимно-однозначное соответствие между множеством всех натуральных чисел, которые при делении на 3 дают остаток 2, и натуральным рядом.

1.29. Установить взаимно-однозначное соответствие между интервалом (a, b) и всей числовой прямой.

1.30. Установить взаимно-однозначное соответствие между лучом $[a, b)$ и лучом $[a, \infty)$.

1.31. Установить взаимно-однозначное соответствие между точками плоскости и точками сферы, из которой выброшена одна точка.

1.32. Установить взаимно-однозначное соответствие между точками открытого квадрата и $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ и точками конечной части плоскости.

1.33. Найти мощность множества всех последовательностей натуральных чисел.

1.34. Найти мощность всех конечных последовательностей натуральных чисел.

1.35. Найти мощность всех возрастающих последовательностей натуральных чисел.

1.36. Можно ли построить на плоскости континуум попарно непересекающихся окружностей?

1.37. Можно ли построить на плоскости континуум попарно непересекающихся букв $Г$?

1.38. Найти мощность множества всех действительных чисел, в десятичном разложении которых встречается цифра 3.

2. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

2.1. Высказывания и функции на высказываниях

Математическая логика изучает высказывания, значениями которых может быть «истина» либо «ложь». Так, например, высказывание 3>5 ложно, а высказывание 5>3 истинно. Высказывания могут носить не только математический характер. Например, высказывание «документ получен» может быть истинным или ложным в зависимости от того, какой документ, когда, кем получен и др. Формальный анализ этой ситуации и подобных ей невозможен без определения основных понятий математической логики.

Эти понятия вводятся следующим образом.

Было замечено, что можно получить формальные результаты, абстрагировавшись от способа вычисления истинности самих высказываний. Для этого высказывания достаточно рассматривать как некоторые переменные, уже получившие значения «истина» либо «ложь».

Поясним это на примере. Пусть переменные x_1 и x_2 представляют два различных высказывания: $x_1 = a > 0$, $x_2 = a < 1$, где a — вещественная переменная. Значения переменных x_1 и x_2 истинны либо ложны в зависимости от того, какие значения принимает вещественная переменная a. Так, если $a = 3$, то x_1 — истинно, а x_2 — ложно. Ограничившись только значениями переменных x_1 и x_2, а не способами их получения, можно формализовать процесс перехода от более простых высказываний к более сложным, введя функции F на множестве переменных $x_1, \dots , x_n$, значения которых также могут быть только «истина» или «ложь». Такие функции называются *логическими* или *булевыми*.

В связи с этим математическая логика различает первичные высказывания, построенные в некоторой предметной области, и вторичные, представляющие переменные математической логики. Первичные высказывания именуются *атомами*, а вторичные — *молекулами*.

Работа с молекулами позволяет исследовать свойства логических функций, выполнить обобщения, а затем, в случае необходимости, вернуться к первичным смысловым формам. Так, например, высказывание $x_1 = a > 0$ принимает значение «истина» в том и только в том случае, когда a принадлежит положительной полуоси, а высказывание $x_2 = a < 1$ принимает значение «истина» тогда и только тогда, когда a принадлежит интервалу $(-\infty, 1)$. Располагая переменными x_1, x_2, мы можем, например, поставить вопрос о построении функции $F(x_1, x_2)$, которая принимает значение «истина» тогда и только тогда, когда оба значения аргументов x_1 и x_2 истинны без всякого отношения к атомарному смыслу.

Предположим, что мы построили такую булеву функцию истинности. Тогда мы можем попытаться построить и новое высказывание в атомарном смысле, которое бы соответствовало данной функции. В нашем случае оно выразится так: «точка a принадлежит отрезку $[0, 1]$». Ясно, что любой из булевых функций может отвечать множество атомарных высказываний из различных предметных областей.

Рассмотрим вопрос о построении логических функций.

Ясно, что логические функции строятся на конечных множествах. Поэтому вначале исследуем вопрос о том, какова мощность множества всех логических функций.

Поскольку каждая логическая переменная может принимать только одно из двух значений, то множество всех значений переменных имеет мощность $m = 2^n$, что эквивалентно размещению всех двоичных чисел в разрядной сетке длины n.

В 1.4 нами рассмотрен вопрос о мощности множества всех бинарных функций на дискретном множестве мощности m. Мощность этого множества равна 2^m. Это множество функций можно построить путем перебора всех бинарных значений функции на множестве всех бинарных значений аргументов.

Поэтому число всех функций F, построенных на множестве переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, будет равно 2^m, где $m = 2^n$. Это число обозначается $p(n)$.

Необходимо отметить, что $p(n)$ растет очень быстро в зависимости от n. Так, для различных n имеем: $p(1) = 4$, $p(2) = 16$, а $p(4) = 65536$.

Поэтому, несмотря на то что при любом конечном n значение $p(n)$ конечно, уже при $n>10$ простой перебор всех функций становится практически невозможным даже на суперсовременных компьютерах.

Представляется целесообразным построить и исследовать свойства функций одной и двух переменных.

Все функции одной переменной представлены в табл. 2.1. В этой таблице и далее мы условимся для обозначения «истина» применять символ «1», а для обозначения «ложь» — символ «0». Эти обозначения также являются общепринятыми, но экономят символы.

Таблица 2.1

Функции одной переменной

X	F_0^1	F_1^1	F_2^1	F_3^1
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Из табл. 2.1 видно, что значения функций F_0^1 и F_3^1 не зависят от x. Функция F_1^1 тождественна x. Эти функции не могут представить существенного интереса.

Представляет интерес функция F_2^1, значения которой обратны по отношению к значениям аргумента. В связи с этим F_2^1 получила специальное название — *отрицание*.

Далее в том же плане предстоит рассмотреть функции двух аргументов. Все они представлены в табл. 2.2. Предварительно сделаем некоторые замечания.

Таблица 2.2

Функции двух переменных

x		$F_i^2,\ (i=1,n)$															
1	2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Отметим, что функция может быть представлена как *операция*, если все ее значения лежат в области определения этой же функции. В этом смысле все функции математической логики могут быть потенциально представлены операциями.

2.2. Операции математической логики

Функции F_2^1 поставлена в соответствие операция отрицания, или логическое «не». Эта операция имеет следующее обозначение: например, если $x = 0$, то $\neg x = 1$. Отрицание определяется таблицей истинности 2.1 для функции F_2^1, рассмотренной выше. Операция отрицания является унарной, так как имеет один аргумент. Ее смысловое значение: «не истина» это «ложь», а «не ложь» — это «истина».

Перейдем теперь к рассмотрению бинарных, т. е. операций, имеющих два аргумента, которые можно получить из табл. 2.2 при анализе свойств функций. Ниже рассмотрены только те функции, которые представляют определенный интерес, аналогично тому, как было сделано при анализе табл. 2.1.

Функция F_1^2 представлена операцией, которая получила название *конъюнкция* или логическое умножение. Этой операции соответствует союз «и» в русском языке. В математической логике для нее приняты обозначения & или $\wedge$. Какой из них применять — дело вкуса. Мы, следуя [2], будем использовать, как правило, первый из них. Конъюнкция истинна тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания, связанные ею. Рассмотрим в качестве примера высказывания $x_1 = a \le 1$, $x_2 = a \ge 0$ и $x_3 = x_1 \& x_2$. Из табл. 2.2 видно, что x_3 истинно тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = 1$. Если теперь вернуться к атомарному смыслу, то получится, что x_3 истинно тогда и только тогда, когда $a \in [0, 1]$. Таким образом, создаются предпосылки получения новых атомарных высказываний на основе формальных результатов математической логики. В этом же плане мы рассмотрим и другие функции, которые получили специальные наименования.

Следующая из них — функция F_6^2 представлена операцией, которая именуется *разделительная дизъюнкция*, *исключающее «или»* или *сложение по модулю два*. Из табл. 2.2 видно, что она принимает значение «истина» тогда и только тогда, когда или один, или другой из операндов истинны, но не оба имеют одно и то же значение истинности. В латыни есть союз «aut» для разделительной дизъюнкции, в русском языке это союз *«или ... или»*. Операция имеет обозначение «$\oplus$». Иногда, если смысл не теряется, то применяют также обозначение «+».

Рассмотрим пример. Пусть $x_1 = a \in A$, $x_2 = b \in B$, где A и B — произвольные множества, и $x_3 = x_1 \oplus x_2$. В этом случае x_3 примет значение «истина» исключительно на симметрической разности множеств A и B. Проверьте это!

Функции F_7^2 поставлена в соответствие операция *дизъюнкция*. В отличие от предыдущей она включительна. В латыни ей соответствует союз «vel». В связи с этим для нее и принято и обозначение «$\vee$». В русском языке ей соответствует союз «или». В качестве примера рассмотрим высказывание $x_3 = x_1 \vee x_2$, где $x_1 = a \in A$, $x_2 = a \in B$, A и B — произвольные множества. Данное высказывание истинно тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из высказываний x_1, x_2 или оба вместе. Нетрудно проверить, что x_3 истинно тогда и только тогда, когда элемент a принадлежит объединению множеств A и B.

Функции F_8^2 поставлена в соответствие операция, именуемая *стрелка Пирса*. Обозначается: «$\downarrow$». Она принимает значение «истина» тогда и только тогда, когда оба ее операнда ложны.

Функции F_9^2 поставлена в соответствие операция *эквивалентность*. Обозначается «~». Ее применение позволяет индицировать эквивалентность операндов в смысле истинности. Это дает возможность расширить эквивалентность вплоть до атомов. Например, пусть $x_1 = (a \bmod 2 = 0)$, $x_2 = (b \bmod 2 = 0)$ и $x_3 = x_1 \sim x_2.$ Тогда x_3 принимает значение «истина» тогда и только тогда, когда a и b находятся в одном классе эквивалентности, то есть оба четные или оба нечетные.

Функции F_{13}^2 поставлена в соответствие операция, именуемая *импликация*. Смысл английского слова «implication» означает «подразумеваемое». Соответствующее обозначение «$\rightarrow$» или «$\supset$». Такая интерпретация породила некоторые споры. Пусть, например, x_1 — высказывание, означающее «2 + 2 = 5», а x_2 — высказывание, которое определяет «3 + 3 = 6». Тогда, согласно табл. 2.2, из того, что x_1 — ложно, а x_2 — истинно, подразумевается, что x_3 — истинно, хотя никакой связи по смыслу между x_1 и x_2 нет. В данной ситуации необходимо снова отметить, что математическая логика ответственности за смысл первичных высказываний не несет. Они могут быть построены не по правилам математической логики, а по правилам предметной области. Тем не менее абстрактный результат нисколько не противоречит логическому смыслу операции. В математике конструкция «если A, то B» ложна тогда и только тогда, когда из истины следует ложь.

Функции F_{14}^2 поставлена в соответствие операция, именуемая *штрих Шеффера.* Она обозначается символом «|». Ее истинностное значение утверждает, что «кто-то лжет»: высказывание, определенное либо первым, либо вторым из двух операндов данной операции, ложно.

2.3. Понятие формулы и свойства операций

Как и в элементарной алгебре, в математической логике из элементарных операций можно строить формулы.

Например, $x_1 \& x_2 \vee \neg x_1 \& x_2$ — формула.

Ясно, что какой бы сложной ни была формула, содержащая n переменных, для нее всегда найдется единственная соответствующая ей функция. Это связано с тем, что математическая логика располагает всеми функциями из конечного множества попарно различных функций. Ниже будет показано, что одной и той же функции можно поставить в соответствие несколько различных формул.

Две различные формулы называются *эквивалентными*, если соответствующие им функции равны.

Из единственности построения функций следует, что формулы эквивалентны, если их таблицы истинности совпадают.

Представляет интерес исследование вопроса о тождественных преобразованиях формул. Для того чтобы выполнять такие преобразования, необходимо предварительно рассмотреть свойства операций математической логики.

Обозначим $x_1 \circ x_2$ любую из операций &, $\vee$ или $\oplus$. Существенно только, чтобы символ «о» имел в тождестве везде один и тот же смысл. В этом случае непосредственно проверяется, что имеют место свойства 1) и 2):

1) ассоциативность

$$((x_1 \circ x_2) \circ x_3) = (x_1 \circ (x_2 \circ x_3));$$

2) коммутативность

$$(x_1 \circ x_2) = (x_2 \circ x_1).$$

Для дизъюнкции и конъюнкции также выполняются дистрибутивные законы:

$$((x_1 \,\&\, x_2) \vee x_3) = (x_1 \vee x_3) \,\&\, (x_2 \vee x_3));$$
$$((x_1 \vee x_2) \,\&\, x_3) = (x_1 \,\&\, x_3) \vee (x_2 \,\&\, x_3)).$$

Имеет место закон двойного отрицания

$$\neg\neg x = x.$$

Кроме того, выполняются следующие свойства операций математической логики:

Законы де Моргана

$$\neg(x_1 \,\&\, x_2) = (\neg x_1 \vee \neg x_2) ;$$
$$\neg(x_1 \vee x_2) = (\neg x_1 \,\&\, \neg x_2).$$

Законы идемпотентности

$$x \vee x = x \,;\, x \,\&\, x = x.$$

Законы поглощения

$$x \vee 0 = x \,; \qquad x \vee 1 = 1;$$
$$x \,\&\, 0 = 0; \qquad x \,\&\, 1 = x.$$

Закон исключенного третьего

$$x \vee \neg x = 1.$$

Закон противоречия

$$x \,\&\, \neg x = 0.$$

Закон силлогизма

$$((x \to y) \,\&\, (y \to z)) \to (x \to z).$$

При тождественных преобразованиях формул используются приоритеты операций. Считается, что операция & сильнее, чем $\vee$. Поэтому если нет скобок, то вначале выполняется &, а затем $\vee$. Остальные бинарные операции имеют тот же приоритет, что и $\vee$.

2.4. Полнота и замкнутость систем булевых функций

Система функций $\{F_1, F_2, ..., F_n\}$ называется функционально *полной*, если любая булева функция может быть записана в виде формулы через функции этой системы.

Введем обозначения

$$x^\sigma = x \cdot \sigma \vee \neg x \cdot \neg\sigma,$$

где σ — параметр, равный либо 0, либо 1, и используется обычное умножение. Очевидно, что

$$x^\sigma = \begin{cases} \neg x \text{ при } \sigma = 0, \\ \\ x \text{ при } \sigma = 1. \end{cases}$$

Такое представление выражает следующий факт: $x^\sigma = 1$ тогда и только тогда, когда $x = \sigma$.

Введем также следующие обозначения:

$$\vee_{(i1,i2,\dots in)} x_i = x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n;$$
$$\&_{(i1,i2,\dots in)} x_i = x_1 \& x_2 \& \dots \& x_n.$$

Теорема 2.1. Каждую функцию математической логики можно представить в виде

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \vee_{(\sigma1,\ \sigma2,\dots,\sigma n)}\ x_1^{\sigma1} \& x_2^{\sigma2} \& \dots \& x_n^{\sigma n} \& \\ \& F(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n), \qquad (2.1)$$

где дизъюнкция берется по всевозможным наборам переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный набор $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ и покажем, что левые и правые части (2.1) принимают на нем и только на нем одно и то же значение. Левая часть (2.1) дает $F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Соответственно правая

$$\vee_{(\sigma1,\sigma2,\dots,\sigma n)} \alpha_1^{\sigma1} \& \alpha_2^{\sigma2} \& \dots \& \alpha_n^{\sigma n} \& F(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n).$$

Конъюнкция $\alpha_1^{\sigma1} \& \alpha_2^{\sigma2} \& \dots \& \alpha_n^{\sigma n} = 1$ тогда и только тогда, когда $\sigma_1 = \alpha_1, \sigma_2 = \alpha_2, \dots, \sigma_n = \alpha_n$. Следовательно, на этом и только на этом наборе $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ имеет место тождество

$$\alpha_1^{\alpha1} \& \alpha_2^{\alpha2} \& \dots \& \alpha_2^{\alpha n} \& F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

При этом остальные дизъюнктивные члены в (2.1) обращаются в нуль.

Разложение (2.1) называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (*С.Д.Н.Ф.*), если оно берется по всем наборам $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, для которых выполнено

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 1.$$

В связи с этим определение С.Д.Н.Ф. записывается в виде

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \vee_{(\sigma1,\ \sigma2,\dots,\ \sigma n)}\ x_1^{\sigma1} \& x_2^{\sigma2} \& \dots \& x_n^{\sigma n}.$$

Применение понятия С.Д.Н.Ф. позволяет легко установить полноту операций отрицания, конъюнкции и дизъюнкции.

Теорема 2.2. Система операций отрицания, конъюнкции и дизъюнкции полна.

Доказательство.

Пусть $F(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$. Тогда представим ее в виде $F(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 \& \neg x_1$. Если же $F(x_1, x_2, ..., x_n) = 1$, то представим ее как С.Д.Н.Ф. Учитывая, что

$$x^{\sigma} = \begin{cases} \neg x \text{ при } \sigma = 0, \\ x \text{ при } \sigma = 1, \end{cases}$$

получим доказательство теоремы.

Пусть Ф — некоторое подмножество булевых функций. *Замыканием* Ф называется множество всех булевых функций, которые можно представить в виде формул через функции множества Ф. Замыкание множества Ф обозначается [Ф]. Если Ф = [Ф], то Ф замкнуто. Можно показать, что замыкание обладает рядом свойств, важнейшими из которых являются:

$$\Phi \subseteq [\Phi] \text{ и } [[\Phi]] = [\Phi].$$

В терминах замыкания можно дать следующее определение полноты. Система функций $\{F_1, F_2, ..., F_n\} = \Phi$ называется *полной*, если замыкание Ф равно множеству всех булевых функций.

Отметим, что подробно и глубоко замкнутые классы булевых функций были изучены американским математиком Э. Постом.

Из результатов его теории, в частности, следует, что рассмотренная выше система операций отрицания, конъюнкции и дизъюнкции является лишь примером полных систем.

2.5. Исчисление предикатов

Пусть A — произвольное множество и $x_1, x_2, ..., x_n \in A$. Построим функцию $P{:}A \to \{0,1\}$. Такая функция называется *предикатом*, а множество A — *предметной областью* предиката. Сами переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ называются *предметными переменными*, а число n — *местностью* предиката.

Рассмотрим, например, одноместный предикат

$$P(x \text{ — поэт-классик}),$$

который принимает значение 1, если x — фамилия и инициалы поэта-классика, и 0 — в противном случае. При подстановке x = «Пушкин А. С.» имеем $P = 1$, а например, если x = «Достоевский Ф. М.», то $P = 0$, т. е.

в данном случае в качестве предметной области рассматривается литературоведение.

Такая ситуация может возникнуть, например, тогда, когда происходит диалог пользователя с компьютером на интеллектуальном уровне. В процессе этого диалога компьютер выдает текущий запрос на экран или в аудиосистему: «Сообщите фамилию и инициалы интересующего вас поэта-классика». Если вы сообщаете, скажем, «Пушкин А. С.», то диалоговая система сужает область своего определения на базу данных, соответствующую жизни и деятельности А. С. Пушкина. Это происходит благодаря тому, что вычисляемый диалоговой системой предикат принимает истинное значение — 1. Если же вы сообщите, скажем, «Достоевский Ф. М.», то предикат примет значение 0 и настроенная на него компьютерная программа, возможно, сообщит, что Ф. М. Достоевский как поэт неизвестен.

В данном случае мы не останавливаемся на описании способа вычисления предиката. Отметим только, что подобные вычисления здесь полностью относятся к компетенции программирования.

Рассмотрим еще построение предиката, который принимает значение 1, если конец вектора $V = (x_v, y_v)$ принадлежит квадрату со стороной единичной длины, смещенного относительно центра системы координат xOx на l единиц вправо и на m единиц вверх (рис. 2.1).

В этом случае предметной областью является теория множеств. Вначале определим предикат принадлежности. Скажем, что

$$P(a \in A) = 1$$

тогда и только тогда, когда $a \in A$.

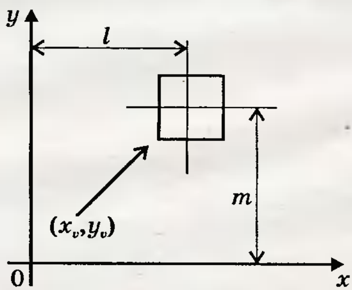


Рис. 2.1

Для построения предиката выделим геометрическое место точек квадрата.

Очевидно, неравенство $-0{,}5 \le (x - l) \le 0{,}5$ выделяет полосу единичной ширины, смещенную на l единиц вправо по оси x. Аналогично неравенство $-0{,}5 \le (y - m) \le 0{,}5$ выделяет полосу также единичной ширины, но смещенную на m единиц вверх по оси ординат. Обозначим выделенные множества соответственно X_l и Y_m .

Ясно, что пересечение этих множеств определяет изображенный на рисунке квадрат. Тогда наш предикат может быть записан следующим образом:

$$P((x_v, y_v) \in X_l \cap Y_m).$$

Если при этом требуется выразить этот же предикат через операции отношений и операции математической логики, то поступим следующим образом. Вначале определим предикат отношения: $P(x \le y) = 1$ тогда и только тогда, когда $x \le y$. Далее заметим, что

$$P((x_v, y_v) \in X_l \cap Y_m) = P((x_v, y_v) \in X_l) \mathbin{\&} P((x_v, y_v) \in Y_m).$$

Справедливость данного выражения проверяется непосредственно.

Выразим теперь предикаты отношения через предикаты принадлежности:

$$P((x_v, y_v) \in X_l) = P(-0{,}5 \le (x - l) \le 0{,}5),$$
$$P((x_v, y_v) \in Y_m) = P(-0{,}5 \le (y - m) \le 0{,}5).$$

Окончательно получим

$$P((x_v, y_v) \in X_l \cap Y_m) = P(-0{,}5 \le (x_v - 1) \le 0{,}5) \mathbin{\&} P(-0{,}5 \le$$
$$\le (y_v - m) \le 0{,}5) = P(-0{,}5 \le (x_v - 1)) \mathbin{\&} P(-0{,}5 \le (y_v - m)\ ) \mathbin{\&}$$
$$\mathbin{\&} P((x_v - \ ) \le 0{,}5) \mathbin{\&} P((y_v - m) \le 0{,}5).$$

Правую часть этого отношения можно реализовать на уровне команд любого современного микропроцессора.

Данный пример иллюстрирует применение предикатов в графическом интерфейсе компьютерных диалоговых систем.

2.6. Введение в методы теории доказательств

Рассмотренные выше предикаты определяют принадлежность точки геометрическому множеству через простые арифметические вычисления и операции алгебры логики. Это наводит на мысль, что многие другие математические построения можно сделать очень наглядными, если пользоваться логическими символами и логическими законами. В подтверждение этой точки зрения, были формализованы и развиты методы *теории доказательств.*

Суть этих методов состоит в следующем. Вначале формируется предметный язык, в терминах которого суждения данной теории записываются в виде формул. Например, в теории множеств элементами такого языка являются символы обозначения элементов множеств, операции принадлежности, включения, объединения множеств и другие. К числу примеров формул теории множеств относятся: $x \in A$, $A \subset B$, $C = A \cap B$ и другие.

Затем описывается аксиоматика предметной области и определяется эквивалентный ей класс формул математической логики. На основании законов математической логики описываются правила вывода, с помощью которых можно переходить от одних формул к другим.

С этой целью в теории доказательств вводятся новые понятия. К их числу относятся *кванторы, выводимые формулы* и *тавтологии*, или *общезначимые формулы.*

Под квантором понимается характеристика степени значения предиката от входящих в него предметных переменных. Используются два квантора: всеобщности и существования. Квантор всеобщности обозначается «$\forall$». Например, символы «$\forall x$» читаются так: «Для всех x ...». Квантор существования обозначается «$\exists$». Символы «$\exists x$» читаются соответственно: «Существует x такой, что ...».

Если существует вывод формулы F из формул F_1, F_2, ..., F_n, по данным правилам, говорят что F *выводима* и пишут $F_1, F_2, ..., F_n + F$.

Формула называется *тавтологией* или *общезначимой*, если она истинна при любых значениях входящих в нее переменных. Например, $\forall x \;\; x \vee \neg x = 1$. Тавтология определяет логический закон. Ее обозначение «$\models$». Основной задачей теории доказательств является получение тавтологий, например более простых из более сложных или обладающих другими полезными качествами.

В качестве примера рассмотрим применение методов теории доказательств к выводу закона теории множеств:

$$A - (A \cap B) = A - B.$$

Введем предикат принадлежности $P(x \in A)$ следующим образом:

$$P(x \in A) = \begin{cases} 1 \text{ если } x \in A, \\ 0 \text{ если } x \notin A. \end{cases}$$

Аналогично построим предикат

$$P(x \notin A) = \begin{cases} 1 \text{ если } x \notin A, \\ 0 \text{ если } x \in A. \end{cases}$$

Непосредственно убеждаемся в том, что $P(x \in A) = \neg P(x \notin A)$.

Поставим во взаимно-однозначное соответствие аксиомам и операциям теории множеств формулы математической логики. Из этих формул мы будем применять следующие:

$x \in A \cup B \Leftrightarrow P(x \in A \cup B) = P(x \in A) \vee P(x \in B)$;

$x \in A \cap B \Leftrightarrow P(x \in A \cap B) = P(x \in A)\ \&\ P(x \in B)$;

$x \in A - B \Leftrightarrow P(x \in A - B) = P(x \in A)\ \&\ \neg P(x \in B)$.

На основании этих эквивалентностей переходим к доказательству закона теории множеств:

$P(x \in A - (A \cap B)) = P(x \in A)\ \&\ P(x \notin A \cap B) =$
$= P(x \in A)\ \&\ \neg P(x \in A \cap B) =$
$= P(x \in A)\ \&\ \neg P(x \in A)\ \&\ P(x \in B) =$
$= P(x \in A)\ )\ \&\ (\neg P(x \in A)\ \&\ \neg P(x \in B)) =$
$= (P(x \in A))\ \&\ \neg P(x \in A)) \vee (P(x \in A)\ \&\ \neg P(x \in B)) =$
$= 0 \vee (P(x \in A)\ \&\ \neg P(x \in B)) = P(x \in A)\ \&\ P(x \notin B))$.

Имеем окончательно: $x \in A - (A \cap B)$: $x \in A - B$.

Задачи

В задачах **2.1 — 2.15** построить таблицы истинности для следующих функций алгебры логики:

2.1. $F(x, y, z) = \neg x\ \&\ y \vee \neg(x \vee z)$.

2.2. $F(x, y, z) = z \to (\neg x \vee \neg y)$.

2.3. $F(x, y, z) = x\ \&\ y \to \neg(x \vee \neg y)$.

2.4. $F(x, y, z) = (x\ \&\ y\ \&\ \neg z) \sim (\neg x \vee y)$.

2.5. $F(x, y, z) = (\neg x \vee \neg z) \sim y$.

2.6. $F(x, y, z) = (x \to y) \to \neg z$.

2.7. $F(x, y, z) = (\neg x \to \neg y)\ \&\ (y \to z)$.

2.8. $F(x, y, z) = x\ \&\ (y \to z) \vee \neg y$.

2.9. $F(x, y, z) = \neg(x \vee y \vee z)$.

2.10. $F(x, y, z) = (x \sim y)\ \&\ (\neg y \sim \neg z)$.

2.11. $F(x, y, z) = (\neg x \to \neg z) \sim y$.

2.12. $F(x, y, z) = (\neg y \vee \neg z) \to (x \vee z)$.

2.13. $F(x, y, z) = x \to (\neg y \vee \neg z)$.

2.14. $F(x, y, z) = (\neg x \to y) \,\&\, (\neg y \to x) \,\&\, \neg z$.

2.15. $F(x, y, z) = z \vee x \,\&\, \neg y$.

В задачах **2.16 — 2.25** упростить выражения, используя известные свойства операций и законы математической логики:

2.16. $x \,\&\, (\neg x \,\&\, y \vee z) \,\&\, (x \vee \neg z)$.

2.17. $(\neg x \vee y) \,\&\, (\neg y \vee x \,\&\, z)$.

2.18. $x \,\&\, (y \sim x) \,\&\, (\neg x \vee \neg z)$.

2.19. $(x \to y) \,\&\, x \,\&\, \neg y$.

2.20. $(\neg x \,\&\, y) \to (z \,\&\, x)$.

2.21. $(x \,\&\, y \sim z) \,\&\, x \,\&\, \neg z$.

2.22. $(x \,\&\, z \vee \neg x \,\&\, \neg y) \,\&\, (z \to y)$.

2.23. $(x \vee y \,\&\, \neg z \vee \neg x \,\&\, \neg y \,\&\, z) \,\&\, x \,\&\, \neg y$.

2.24. $(x \to y) \,\&\, (y \to x)$.

2.25. $(x \,\&\, \neg y \,\&\, z \vee \neg x \,\&\, \neg z) \,\&\, y$.

В задачах **2.26 — 2.35** построить С.Д.Н.Ф. (совершенные дизъюнктивные нормальные формы) по таблицам истинности, которые приведены ниже.

2.26

x	y	z	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

2.27

x	y	z	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

2.28

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

2.29

x	y	z	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

2.30

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

2.31

x	y	z	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

2.32

x	y	z	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

2.33

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

2.34

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

2.35

x	y	z	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

В задачах **2.36 — 2.44** построить предикаты принадлежности некоторой произвольной точки $A(x, y)$ областям, определяемым следующими геометрическими фигурами:

2.36. Кругом радиуса $r = 5$ с центром в точке (5,5).

2.37. Кругом радиуса $r = 10$ с центром в точке (–5,5).

2.38. Треугольником, вершины которого имеют координаты: $A(5, 5)$, $B(5, 0)$, $C(0, 5)$.

2.39. Квадратом с центром в начале координат и стороной $a = 7$.

2.40. Любым прямоугольником, две стороны которого расположены на осях координат. Длины этих сторон: по оси абсцисс 5, по оси ординат — 10.

2.41. Кольцом с центром в начале координат. Его радиусы: $r = 4$, $R = 6$.

2.42. Кольцом с центром, смещенным от начала координат на 3 единицы вправо и 2 единицы вверх. Его радиусы: $r = 4$, $R = 6$.

2.43. Областью, ограниченной параболой $y = x^2$ и отрезком вещественной оси $[-1, 1]$.

2.44 . Областью, ограниченной прямой $y = x$ и отрезком вещественной оси $[0, 5]$.

В задачах **2.45 — 2.50** доказать следующие тождества вначале на языке теории множеств, а затем — на языке теории доказательств:

2.45. $A \cap (A \cup B) = A$.

2.46. $A \cup (A \cap B) = A$.

2.47. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

2.48. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

2.49. $I \setminus (A \cup B) = (I \setminus A) \cap (I \setminus B)$.

2.50. $I \setminus (A \cup B) = (I \setminus A) \cap (I \setminus B)$.

3. КОМБИНАТОРИКА

Комбинаторика — это раздел математики, изучающий методы построения конечных или счетных множеств. В настоящем разделе мы ограничимся лишь конечными множествами.

При комбинаторных построениях решается либо задача *выбора*, либо задача *расположения*.

В первом случае определяются правила, по которым из исходных множеств выбираются элементы, а во втором — из заданных элементов строятся новые множества. В любом из этих случаев имеем построение *комбинаторной конфигурации*.

Комбинаторика включает в себя вопросы существования комбинаторных конфигураций, исследования их мощностей и алгоритмов построения.

Основными классами комбинаторных конфигураций являются *размещения, перестановки* и *сочетания,* именуемые как *соединения,* а также *композиции* и *разбиения*.

3.1. Размещения

Пусть X — конечное множество, содержащее n элементов. Такое множество в комбинаторике именуют n-множеством X или n-X множеством.

Мы будем строить размещения на основе постановок задач выбора и расположения.

Запишем эти задачи вначале в их простейшей формулировке.

Начнем с задачи *выбора*. Пусть задано n-X множество. Можно считать, что в качестве элементов $n\text{-}X = \{x_1, ..., x_n\}$ имеем пронумерованные шары, помещенные в непрозрачную урну. Требуется построить комбинаторную конфигурацию — множество Y всех возможных вариантов выбора одного шара без повторений. При этом порядок представления элементов в множестве Y существенным не является.

Поясним эту задачу примером. Пусть на столе у технического секретаря некоторой фирмы лежит n зарегистрированных писем (имеем множество n-X). Руководитель фирмы для ознакомления выбирает наугад только одно из них. Требуется построить комбинаторную конфигурацию: множество Y всех возможных вариантов выбора.

Соответствующая задача *расположения* ставится следующим образом.

Будем рассматривать множество n-X как набор из n пронумерованных ячеек, например урн, в каждой из которых могут размещаться какие-либо объекты, например шары. Сколькими способами и как можно расположить по одному разу в каждой урне один шар, если порядок выбора урн не существенен?

Примером такой задачи является следующая.

Некоторый актовый зал представлен n пронумерованными местами (имеем множество n-X). Требуется записать все варианты возможного размещения одного человека на этих местах (множество Y). Порядок представления элементов в множестве Y существенным не является. Считаем, что один человек не может занимать несколько мест одновременно.

Решения этих задач очевидны. Количество способов выбора либо расположения в обеих наших задачах равно n, а для решения поставленных задач достаточно переписать все элементы множества n-X в множество n-Y в произвольном порядке, то есть отобразить n-X на себя.

Задачи выбора и расположения, как правило, объединяют общим термином — *размещения*.

В простейшей постановке задачи алгоритм построения множества размещений n-Y можно записать, например, в следующем виде:

$$(i = 1,\ n\ (y_i = x_i)), \tag{3.1}$$

где запись «$i = 1,\ n$» означает, что i — переменная, определяющая номер шага алгоритма, пробегает все значения от 1 до n, а y_i определяется элементом x_i множества n-X на каждом из этих шагов. Для обеих наших задач алгоритм (3.1) дает $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, ..., $y_n = x_n$.

Очевидно, можно построить другой алгоритм получения той же комбинаторной конфигурации, отличающейся порядком элементов. Например, можно получить элементы $y_1 = x_2$, $y_2 = x_1$, однако новой комбинаторной конфигурации при этом не получится, поскольку порядок расположения элементов комбинаторной конфигурации не является существенным.

Размещения, отличающиеся только порядком составляющих их элементов, будем рассматривать как *равные*, поскольку равны и соответствующие им множества.

Любые алгоритмы решения задачи размещения, которые на одном и том же множестве исходных данных дают одни и те же комбинаторные конфигурации, мы будем рассматривать как *эквивалентные*.

Заметим еще, что любой из элементов множества n-X можно однозначно определить своим номером. Тогда без ограничения общности можно считать n-$X = \{1, \ldots, n\}$, а алгоритм (3.1) записывать в виде

$$(i = 1, n\ (y_i = i)).$$

Пусть теперь имеем два непересекающихся множества: n_1-X_1 и n_2-X_2, — и поставлены те же задачи выбора и расположения на их объединении: n-$X = n_1$-$X_1 \cup n_2$-X_2. Очевидно, в этом случае *количество всех способов размещений равно* $n_1 + n_2$, а алгоритм их построения можно записать, например, так:

$$(i = 1, 2\ (j = 1, n_i\ (y_{ij} = \langle i, j\rangle))). \qquad (3.2)$$

В этом алгоритме для каждого $i = 1, 2$ во внешних скобках перебираются все значения $j = 1, n_i$ в скобках второй вложенности и при этом для каждой пары i, j имеем $y_{ij} = \langle i, j\rangle$ во внутренних скобках. Угловые скобки используются для обозначения упорядоченных множеств.

Предположим, например, что необходимо отправить заказной документ из Харькова в Киев. Для этого имеется $n_1 = 3$ железнодорожных почтовых рейса ($X_1 = \{1, 2, 3\}$) и $n_2 = 2$ авиа ($X_2 = \{1, 2\}$). Код железнодорожных рейсов обозначим 1, а код авиа — 2. Этот код условимся писать перед кодом рейса. В такой интерпретации алгоритм (3.2) дает перебор всех возможных способов отправки документа из Харькова в Киев:

$$y_{ij} = \left\{\begin{matrix} \langle 1, 1\rangle\ \langle 1, 2\rangle\ \langle 1, 3\rangle \\ \\ \langle 2, 1\rangle\ \langle 2, 2\rangle \qquad\qquad \end{matrix}\right\}.$$

Всего имеем $3 + 2 = 5$ способов.

Предположим теперь, что имеем семейство непересекающихся множеств: n_1-X_1, n_2-X_2, ..., n_r-X_r. Чему равно число n элементов размещений? В этом случае по индукции получим $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$. Соответствующий алгоритм размещений будет иметь вид

$$(i = 1,\ r\ (j = 1,\ n_i\ (y_{ij} = \langle i,\ j\rangle))).$$

Пусть имеем декартово произведение n_1-X_1 и n_2-X_2 множеств. Поставим на этом декартовом произведении задачи выбора или расположения. В таком случае решение задач, очевидно, состоит в подсчете и переборе всех упорядоченных пар $\langle x_1,\ x_2\rangle$. Запишем алгоритм построения размещений:

$$(i = 1,\ n_1\ (j = 1,\ n_2\ (y_{ij} = \langle i,\ j\rangle))). \tag{3.3}$$

В качестве примера построим все возможные танцующие пары y_{ij}, если имеем $n_1 = 2$ девушки и $n_2 = 3$ юноши. Применяя алгоритм (3.3), имеем значения

$$y_{ij} = \left\{ \begin{matrix} \langle 1,\ 1\rangle & \langle 1,\ 2\rangle & \langle 1,\ 3\rangle \\ \\ \langle 2,\ 1\rangle & \langle 2,\ 2\rangle & \langle 2,\ 3\rangle \end{matrix} \right\}.$$

Здесь первой цифрой кодирована девушка, а второй — юноша.

При выполнении алгоритма (3.3) каждому из n_1 значений i ставится в соответствие n_2 значений j. Поэтому *число элементов размещений на декартовом произведении множеств n_1-X_1 и n_2-X_2 равно $n_1 \cdot n_2$.*

Геометрическая интерпретация способов расположения одного шара в ячейках декартового произведения данного примера представлена на рис. 3.1.

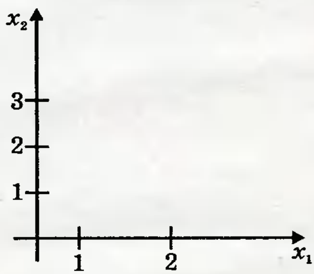


Рис. 3.1

Пусть имеем декартово произведение множеств n_1-X_1, n_2-X_2, ..., n_r-X_r. В этом случае, индуктивно обобщая результат, полученный выше, видим, что *число элементов размещений на данном декартовом произведении* множеств n_1-X_1, n_2-X_2, ..., n_r-X_r *равно* $n_1 \cdot n_2 ... n_r$.

Соответствующий алгоритм будет иметь вид

$$(i1 = 1,\ n_1\ (i2 = 1,\ n_2,\ ...,\ (ir = 1,\ n_r (y_{i1,\ i2, ... ir} = \\ = \langle i1,\ i2,\ ...,\ ir\rangle)...). \tag{3.4}$$

Геометрическая интерпретация размещений в случае $r = 2$ рассмотрена выше и представляет множество точек на плоскости (рис. 3.1). В случае, когда $r = 3$, имеем множество точек в трехмерном пространстве, и т. д.

Усложним теперь задачу расположения в сторону увеличения числа размещаемых объектов.

Будем рассматривать множество n-X как набор из n пронумерованных урн, в каждой из которых могут размещаться пронумерованные шары — объекты из множества r-S.

Сколькими всеми различными способами и как можно расположить r различных шаров на данном множестве урн? Порядок расположения всех этих шаров в каждой из r-ок будем считать несущественным.

Обозначим соответствующий элемент размещений

$$y_{1,2,\dots,r} = \langle i_1, i_2, \dots, i_r \rangle,$$

где $i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ — номер урны, в которой размещается k-ый шар; $k \in \{1, 2, \dots, r\}$.

Покажем, что множество всех таких размещений можно определить алгоритмом:

$$(i1 = 1, n\ (i2 = 1, n, \dots, (ir = 1, n\ (y_{1,2,\dots r} = \\ = \langle i1, i2, \dots, ir \rangle)\dots). \qquad (3.5)$$

Действительно, выбор размещения первого шара мы можем выполнить n различными способами: $i1 = 1, n$ во внешних скобках. С каждым из этих способов может комбинировать n размещений второго шара: $i2 = 1, n$ во внутренних скобках первой вложенности. В результате имеем n^2 способов размещения двух шаров. При индуктивном предположении, что размещены $r-1$, шар имеем n^{r-1} способов размещений $r-1$ шара, которым соответствует $r-1$ вложенных скобок по переменным $i1, i2, \dots, ir-1$ в алгоритме (3.5). Следовательно, в результате выполнения этого алгоритма имеем n^r различных элементов конфигурации размещений.

Сформулируем постановку задачи выбора.

В урне имеется n пронумерованных шаров: имеем множество n-X. Один шар извлекается наугад, и номер его фиксируется. Далее шар снова возвращается в урну. Процедура выбора шаров повторяется r раз: имеем множество r-S, элементами которого являются номера шагов выбора шара из урны.

Сколько и каких различных r-ок можно получить таким выбором?

Эта задача именуется *выбор с возвращением*.

Обозначим соответствующий элемент выбора:

$$y_{1,\,2,\,\dots,\,r} = \langle i_1,\, i_2,\, \dots,\, i_r\rangle,$$

где $i_k \in \{1,\ 2,\ \dots,\ n\}$ — номер, присвоенный k-ому извлеченному шару в выбранной r-ке.

Покажем, что требуемая комбинаторная конфигурация определяется алгоритмом

$$(i1 = 1,\, n\ (i2 = 1,\, n,\, \dots,\, (ir = 1,\, n(y_{1,\,2,\,\dots r} = \\ = \langle i1,\, i2,\, \dots,\, ir\rangle)\dots). \qquad (3.6)$$

Действительно, выбор первого шара мы можем выполнить n различными способами: $i1 = 1,\, n$. Поскольку первый шар вновь возвращается в урну, то с каждым из этих способов может комбинировать n выборов второго шара: $i2 = 1,\, n$ в скобках второй вложенности. В результате имеем n^2 способов выбора двух шаров. При индуктивном предположении, что выбраны $r-1$ шар имеем n^{r-1} способов выбора, что обеспечивается применением $r-1$ вложенных скобок по переменным $i1,\, i2,\, \dots,\, ir-1$ в алгоритме (3.6). Следовательно, в результате выполнения этого алгоритма имеем n^r различных элементов выбора значений $i_1, i_2, \dots, i_r$, что и требовалось показать.

Сравним алгоритмы (3.5) и (3.6). Они тождественны по записи и отличаются только обозначениями переменных. Следовательно, с теоретико-множественной точки зрения каждый из этих алгоритмов решает одну и ту же задачу, а именно: дает построение множества всех функций, определенных на декартовом произведении r-S×n-X, где каждая функция $y_{1,\,2,\,\dots,\,r}$ однозначно определяется набором значений $\langle i_1,\, i_2,\, \dots,\, i_r\rangle$.

Все проведенные нами выше рассуждения можно объединить в виде теоремы.

Теорема 3.1. Размещение r различных объектов n-различными способами эквивалентно построению всех функций $F{:}r\text{-}S\rightarrow n\text{-}X$, число которых равно n^r.

Все функции размещений в качестве примера при $r = 2$ и $n = 3$ приведены на рис. 3.2. Число таких функций в данном примере составляет $n^r = 3^2 = 9$.

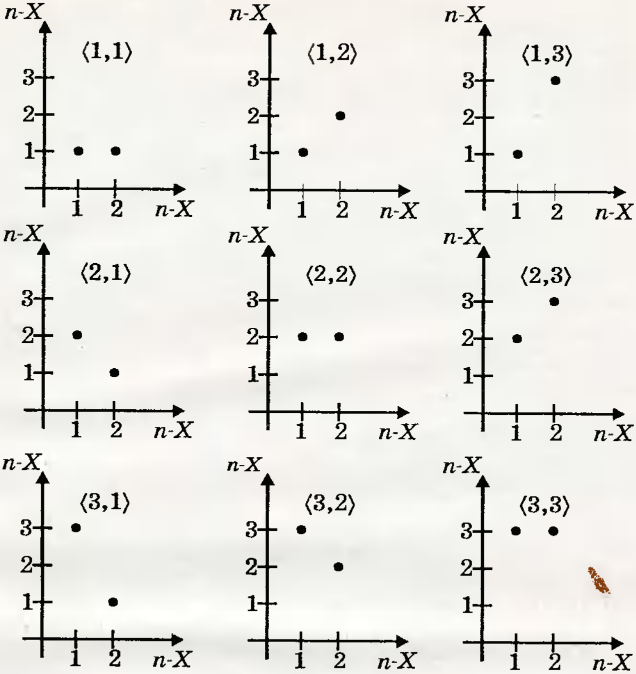


Рис. 3.2

3.2. Размещения без повторений

Введем ограничения на постановку задачи о размещениях. Пусть на декартовом произведении n-X и r-S множеств построены все функции $F{:}r\text{-}S > n\text{-}X$. Сколько из них инъективных? В качестве примера рассмотрим случай, когда $r = n = 3$.

Все функции, соответствующие этому случаю, представлены на рис. 3.3:

⟨1,1,1⟩ ⟨1,1,2⟩ ⟨1,1,3⟩;
⟨1,2,1⟩ ⟨1,2,2⟩ **⟨1,2,3⟩**;
⟨1,3,1⟩ **⟨1,3,2⟩** ⟨1,3,3⟩;
⟨2,1,1⟩ ⟨2,1,2⟩ **⟨2,1,3⟩**;
⟨2,2,1⟩ ⟨2,1,2⟩ ⟨2,1,3⟩;
⟨2,3,1⟩ ⟨2,3,2⟩ ⟨2,3,3⟩;
⟨3,1,1⟩ **⟨3,1,2⟩** ⟨3,1,3⟩;
⟨3,2,1⟩ ⟨3,2,2⟩ ⟨3,2,3⟩;
⟨3,3,1⟩ ⟨3,3,2⟩ ⟨3,3,3⟩.

Рис. 3.3

В данном примере из всех полученных функций имеем 6 инъективных. Все они выделены (рис. 3.3).

Размещения, соответствующие инъективным функциям, называются *размещениями без повторений* либо *инъективными размещениями*.

Ясно, что инъективные функции составляют всего лишь подмножество всех функций $F : r\text{-}S > n\text{-}X$. Поэтому для их получения достаточно наложить ограничения на алгоритмы (3.5) или (3.6). Рассмотрим этот вопрос на примере решения задачи выбора без повторений r объектов на множестве $n\text{-}X$.

Данная задача имеет следующую интерпретацию.

В урне имеется n пронумерованных шаров. Последовательно один за другим извлекаются r шаров и их номера фиксируются. Сколько и каких различных r-ок шаров может быть выбрано?

Проведем соответствующие комбинаторные рассуждения.

Выбор значения первого элемента y_1 можно осуществить n способами. Выбор второго элемента y_2 можно выполнить только $n-1$ способами с каждым из первых, запретив применять уже выбранное значение. Индуктивно предполагая, что таким образом выбраны уже $r - 1$ элемент, получим, что r-ый элемент можно выбрать $n(n -1...(n - (r - 1))$ способами с каждым из предыдущих, поскольку для него запрещен выбор любого из уже выбранных предыдущих значений. Поэтому всего будет получено $n(n - 1...(n - (r - 1))$ различных элементов комбинаторной конфигурации.

Для определения числа инъективных размещений приняты обозначения: A_n^r или $[n]_r$.

В соответствии с проведенными выше рассуждениями имеем

$$A_n^r = n(n - 1)... (n - (r - 1)). \tag{3.7}$$

Выражение (3.7) представляет полином от переменной n степени r:

$$A_n^r = \Sigma_{k=0}^r s(r, k)n^k.$$

Коэффициенты $s(r, k)$ этого полинома известны в комбинаторике как *числа Стирлинга первого рода*.

Алгоритм инъективных размещений получим, если введем рассмотренные выше ограничения в алгоритме (3.6). С учетом ранее введенных обозначений будем иметь:

$(i1 = 1, n\ (i2 = 1, n, ..., (ir = 1, n(y_{1,2,...r} = \langle i1, i2, ..., ir \rangle ...).$ (3.8)

$i2 \quad i1 \ldots \quad ir \quad i1 \ldots ir{-}1$

Рассмотренная нами задача именуется *выбор без возвращений.*

Соответствующая задача расположения имеет следующую формулировку.

Требуется расположить r пронумерованных шаров по n пронумерованным урнам так, чтобы ни в одну урну не попадало два шара одновременно. Сколько возможно расположений и каких?

Эта задача также решается с применением алгоритма (3.8), соответственно в обозначениях, принятых для алгоритма (3.5).

Изложенное выше позволяет получить доказательство следующей теоремы.

Теорема 3.2. Размещения r различных объектов n различными способами без повторений эквивалентны всем инъективным функциям, определенным на множестве r-S со значениями в множестве n-X, число которых

$$A_n^r = n(n - 1) \ldots (n - (r - 1)).$$

3.3. Перестановки и подстановки

Рассмотрим теперь частный случай инъективных размещений, когда $r = n$, по-прежнему полагая, что $n\text{-}X = \{1, 2, \ldots, n\}$.

В этом случае можно считать, что имеет место биекция f: n-X > n-X. Любая такая биективная функция называется *подстановкой*, а результат ее применения к множеству n-X — *перестановкой.*

Подстановки обозначаются символами f, g, h или другими латинскими буквами.

Подстановка задается в виде биективной таблицы, где верхняя строка представляет исходный элемент, а нижняя — полученный из исходного путем изменения порядка компонент элемента. Например, подстановка

$$f = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \\ \\ 3\ 2\ 1 \end{pmatrix}$$

переводит элементы множества $\{1, 2, 3\}$ так: 1 в 3, 2 в 2, а 3 в 1.

В другом примере таблицы

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 2 & 2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 2 & 1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{pmatrix}$$

подстановками не являются: в первом и во втором случаях разные элементы переходят в один и тот же элемент, а в третьем появились значения, не принадлежащие $X = \{1, 2, 3\}$.

Задача получения множества всех подстановок на n-X эквивалентна задаче получения всевозможных перестановок местами элементов соответствующего n-X упорядоченного множества. Так, из множества всех функций, полученных при решении задачи о размещениях при $n = r = 3$, имеем перестановки:

$\langle 1, 2, 3\rangle$, $\langle 1, 3, 2\rangle$, $\langle 2, 1, 3\rangle$, $\langle 2, 3, 1\rangle$, $\langle 3, 1, 2\rangle$, $\langle 3, 2, 1\rangle$.

Далее нам понадобится понятие факториала целого положительного числа n. Так называется обозначение $n!$. (Символ «$n!$» читаются «n-факториал»).

Значение $n!$ определяется следующим образом:

$$n! = \begin{cases} 1, \text{ если } n = 0, \\ 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n, \text{ если } n > 0. \end{cases}$$

Теорема 3.3. Число всех перестановок множества n-X равно

$$A_n^n = n!. \qquad (3.9)$$

Доказательство. Все перестановки множества n-X определяются множеством всех подстановок из n-X на n-X. Поэтому, полагая в формуле (3.7) $n = r$, получим

$A_n^n = n(n - 1 \cdot \ldots \cdot (n - (n - 1)) = n(n - 1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$,

что и требовалось доказать.

Поскольку любая подстановка осуществляет биекцию из n-X на n-X, это наводит на мысль, что можно записывать подстановки в виде одной строки, рассматривая соседние элементы, как подстановки из $x_i > x_{i+1} > \ldots$. В связи с тем, что множество n-X конечно, этот процесс должен закончиться на том же элементе, на котором начался, а затем повториться. Поэтому однострочные подстановки называют *циклами.* Одной подстановке может соответствовать некоторое множество циклов. Поясним это на примере.

Пусть $f = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

Тогда $1 \to 4$, $4 \to 7$, $7 \to 2$... и можно разложить подстановку в произведение двух циклов, области которых отмечены квадратными скобками.

$$f = [1\ 4\ 7\ 2\ 5\ 8][3\ 6].$$

Пусть дана подстановка $f = [x_1, x_2, ..., x_n]$. Пару (x_i, x_j) $(i < j)$ будем называть *инверсией* подстановки f, если $x_i > x_j$. Подстановка называется *четной*, если число инверсий в ней четно, и *нечетной* в противном случае.

Так, подстановка [1 4 7 2 5 8] имеет следующие инверсии: (4 2), (7 2), (7 5), (8 1) и, следовательно, является четной.

Подстановка называется *транспозицией*, если она представляет цикл длины два.

Понятия инверсии и транспозиции широко используются в алгоритмах сортировки.

Пусть элементы n-X расположены в случайном порядке. Составим предикат: $p(x_i, x_j) = 1$ тогда и только тогда, когда имеет место инверсия x_i, x_j. Пусть также функция $transp(x_i, x_j)$ осуществляет транспозицию элементов x_i, x_j, т. е. переставляет их местами. Тогда алгоритм

$$(i = 1, n - 1(p(x_i, x_{i+1}) > transp(x_i, x_{i+1})) \qquad (3.10)$$

«выталкивает» наибольший элемент в конец списка элементов множества n-X. Решая эту же задачу повторно, для элементов множеств $(n - j)$-X, $(j = 1, n - 1)$ можно упорядочить все элементы n-X по возрастанию. Алгоритм этой сортировки запишется так:

$$(j = 1, n - 1(i = 1, n - j(p(x_i,x_{i+1}) > transp(x_i, x_{i+1}))). \quad (3.11)$$

В программировании он имеет наименование *сортировка пузырьком.*

Множество всех подстановок n-X множества обозначают S_n.

В алгебре этими же символами обозначают так называемую *симметрическую группу*. Рассмотрим, с чем связано применение этого понятия к перестановкам.

Произведением подстановок f и g называют подстановку, полученную последовательным применением вначале подстановки f, а затем — g, и пишут gf. Например, если

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

то $$gf = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что операция произведения подстановок свойствами коммутативности, вообще говоря, не обладает. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть в предыдущем примере произведение fg. Применяя последовательно вначале g, а потом f, получим

$$fg = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Докажем, что операция произведения подстановок ассоциативна, т. е. $(hg)f = h(gf)$.

Пусть a — произвольная компонента элемента перестановки, которая применением f переходит в b. Запишем это как

$$a \xrightarrow{f} b.$$

Пусть также имеем $b \xrightarrow{g} c$ и $c \xrightarrow{h} d$.

Тогда, последовательно применяя вначале $(hg)f$, а затем $h(gf)$, получим

$a \xrightarrow{f} b,\ b \xrightarrow{hg} d \Rightarrow a \xrightarrow{(hg)f} d;$

$a \xrightarrow{gf} c,\ c \xrightarrow{h} d \Rightarrow a \xrightarrow{h(gf)} d,$

что и требовалось доказать.

Считается, что множество G образует *группу*, если каждой паре элементов $f, g \in G$ поставлен в соответствие элемент $h = gf \in G$ так, что $(hg)f = h(gf)$ и при этом для любого $f \in G$ существует обратный элемент $f^{-1} \in G$, такой что $f^{-1}f = e$.

Нетрудно заметить, что в соответствии со свойством биекции, данным по определению, для любой $f \in S_n$ однозначно установлена обратная подстановка, обозначаемая f^{-1}, которая принадлежит G. Для того чтобы ее получить, достаточно поменять строки в записи f. Если теперь обозначить e как тождественную подстановку, т. е. подстановку, переводящую каждый элемент в себя, то становится видно, что для всех $f \in G$ имеем $f^{-1}f = e$.

Рассмотрим пример. Пусть

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ тогда } f^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ и } ff^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Из перечисленных свойств множества S_n следует, что оно действительно образует группу.

Групповые свойства перестановок используются при доказательстве различных комбинаторных построений. Ниже мы используем эти свойства для исследования структуры соединений.

3.4. Сочетания, структура соединений

Вернемся к задаче о размещениях как к построению всех функций на декартовом произведении r-S и n-X множеств.

Из изложенного в 3.3 следует, что множество всех таких функций можно представить в виде двух непересекающихся множеств: функций с повторениями значений и инъективных функций.

Покажем, что инъективные функции можно разбить на классы эквивалентности.

Ясно, что если $r > n$, то множество инъективных функций пусто. Это непосредственно вытекает из формулы (3.7). Поэтому будем считать, что $r \leq n$.

Элементы $y = \langle x_1, x_2, \ldots x_r\rangle$ и $y' = \langle x_1', x_2', \ldots x_r'\rangle$ эквивалентны, если найдется такая подстановка f, что $f(y) = y'$.

Покажем, что это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно и, следовательно, разбивает все множество инъективных функций y на классы.

Действительно, рефлексивность следует из существования единичной подстановки $e(y) = y$, симметричность вытекает из существования обратной подстановки: если $f(y) = y'$, то $f^{-1}(y') = y$, транзитивность определяется правилом произведения подстановок: если $f_1(y) = y'$, а $f_2(y') = y''$, то $f_2 f_1(y) = y''$.

Рассмотрим теперь вопросы о построении и числе классов эквивалентности.

Для построения любого класса эквивалентности выберем произвольную инъективную функцию $y = \langle x_1, x_2, \ldots x_r\rangle$ и построим все перестановки ее значений. Таких перестановок будет $r!$. Множество всех этих перестановок образует класс функций, замкнутый относительно всевозможных подстановок на множестве $\{x_1, x_2, \ldots x_r\}$. В качестве представителя класса можно выбрать любую из этих функций. Мы выберем такую, для которой $x_1 < x_2 < \ldots < x_r$.

Если $r = n$, то этими подстановками исчерпывается все множество инъективных функций, поскольку $r! = A_r^r$, в противном случае найдется функция со значениями $\langle x_1', x_2', ..., x_r' \rangle$, из которых хотя бы одно отлично от любых других из всех предыдущих перестановок. Но тогда вместе с ней имеем еще $r!$ перестановок, соответствующих новому классу инъективных функций. Представителя полученного класса снова выберем так, чтобы было выполнено $x_1' < x_2' < ... < x_r'$.

Поступая аналогично, построим все классы эквивалентности.

Обозначим число всех классов эквивалентности m.

Поскольку каждый класс эквивалентности содержит $r!$ инъективных функций, определенных на $\{x_1, x_2, ..., x_r\}$ и при этом имеем все классы, то $m \cdot r! = A_n^r$. Следовательно,

$$m = A_n^r / r!. \qquad (3.12)$$

Отношение $A_n^r / r!$ имеет специальные обозначения:

$$\binom{n}{r} \qquad \text{либо } C_n^r.$$

(Первое читается: «n над r», второе — «C из n по r».)

Число C_n^r определяет количество классов перестановок в разбиении множества инъективных функций на классы. Каждый такой класс полностью определяется своим представителем, для которого выполнено: $x_1 < x_2 < ... < x_r$. Поэтому можно считать, что C_n^r определяет мощность множества всех упорядоченных r-ок, со значениями в n-X. Это множество имеет специальное наименование — сочетания. Есть и другое название: r-подмножества n-X множества.

Обобщая полученные результаты, получаем следующую теорему.

Теорема 3.4. Сочетания из n различных элементов по r $(n \geq r)$ эквивалентны множеству классов упорядоченных размещений, инвариантных относительно всех перестановок входящих в них элементов. Число этих классов

$$C_n^r = A_n^r / r! = n! / (r!(n - r)!).$$

Пример структуры соединений представлен на рис. 3.4.

Числа C_n^r исторически известны как *биномиальные коэффициенты*. Они обладают рядом интересных свойств, которые будут рассмотрены в следующем разделе.

Структура соединений

F: r-$S > n$-X,

$r = 3$, $n = 4$.

Размещений: n^r

$$\left\{\begin{array}{llll}
111 & 112 & 113 & 114 \\
121 & 122 & \mathit{123} & \mathit{124} \\
131 & \mathit{132} & 133 & \mathit{134} \\
141 & \mathit{142} & \mathit{143} & 144 \\
 & & & \\
211 & 212 & \mathit{213} & \mathit{214} \\
221 & 222 & 223 & 224 \\
\mathit{231} & 232 & 233 & \mathit{234} \\
\mathit{241} & 242 & \mathit{243} & 244 \\
 & & & \\
311 & \mathit{312} & 313 & \mathit{314} \\
\mathit{321} & 322 & 323 & \mathit{324} \\
331 & 332 & 333 & 334 \\
\mathit{341} & \mathit{342} & 343 & 344 \\
 & & & \\
411 & \mathit{412} & \mathit{413} & 414 \\
\mathit{421} & 422 & \mathit{423} & 424 \\
\mathit{431} & \mathit{432} & 433 & 434 \\
441 & 442 & 443 & 444
\end{array}\right\}$$

Всех инъективных (упорядоченных) размещений:

$A_n^r = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(r-1))$

$$\left\{\underbrace{\begin{array}{llllll}
123 & 132 & 213 & 231 & 312 & 321 \\
124 & 142 & 214 & 241 & 412 & 421 \\
134 & 143 & 314 & 341 & 413 & 431 \\
234 & 243 & 324 & 342 & 423 & 432
\end{array}}_{\text{перестановок: } r!}\right.$$

Сочетаний как классов инъективных размещений:

$C_n^r = A_n^r / r! = n!/(r!(n-r)!)$

Рис. 3.4

3.5. Свойства биномиальных коэффициентов

Своим историческим названием числа C_n^r обязаны формуле бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = \Sigma_{r=0}^{n} C_n^r a^r b^{n-r}. \qquad (3.13)$$

В этой формуле числа C_n^r определяют число произведений $a^r b^{n-r}$, которое равно числу всех сочетаний из n по r при суммировании этих произведений от $r = 0$ до n. Этот факт имеет вполне комбинаторное обоснование. Формула (3.13) относится к классу *производящих функций*, которые будут рассмотрены в 3.6. Здесь же нас интересуют свойства биномиальных коэффициентов.

Полагая в (3.13) $a = b = 1$, получим

$$\Sigma_{r=0}^{n} C_n^r = 2^n. \qquad (3.14)$$

Этой формулой выражается число всех r-подмножеств n-X множества.

Из формул (3.6) и (3.2) следует, что

$$C_n^r = n(n-1)\ldots(n-(r-1)) \;/\; r!$$

Умножив и разделив обе части этого равенства на $(n-r)!$, получим

$$C_n^r = n!/(r!(n-r)!). \tag{3.15}$$

Из этой формулы при подстановках вместо r значения $(n-r)$ следует, что $C_n^r = C_n^{n-r}$. Это свойство называется *симметрией* биномиальных коэффициентов.

Далее, при $r = 0$ или $r = n$ из (3.15)

$$C_n^0 = C_n^n = 1. \tag{3.16}$$

Докажем, что для C_n^r имеет место соотношение

$$C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}. \tag{3.17}$$

Зафиксируем любой элемент x_i в $\langle x_1, x_2, \dots x_n \rangle$. Тогда множество всех r-элементных подмножеств n-X множества распадается на два непересекающихся класса: тех, что не содержат x_i, и тех, что его содержат. Число элементов первого класса равно C_{n-1}^r, так как r-подмножество строится на $(n-1)$-X множестве. Число элементов второго класса равно C_{n-1}^{r-1}, поскольку эти элементы определяются всеми $(r-1)$-подмножествами, построенными на $(n-1)$-X множестве, с которыми комбинирует элемент x_i. Доказательство окончено.

Свойства (3.16) и (3.17) позволяют расположить биномиальные коэффициенты в виде треугольника, по краям которого записаны единицы, а каждый элемент внутри вычисляется как сумма чисел, находящихся в верхнем ряду над ним. Строки имеют номера, идущие сверху вниз, начинаясь с нуля. Ими определяются значения n в (3.17). Значения r в этом же соотношении определяются номером элемента в строке. Эти значения также начинаются с нуля.

Построенная треугольная таблица чисел известна как *треугольник Паскаля*:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\end{array}$$

....

Она наглядно определяет значения биномиальных коэффициентов при малых значениях n и r.

3.6. Понятие производящей функции

Из математического анализа хорошо известен ряд Маклорена:

$$\varphi(x) = \Sigma_{k=0}^{n} a_k x^k, \tag{3.18}$$

где $a_k = \varphi^k(0) / k!$.

В разложении (3.18) произвольной аналитической в окрестности нуля функции $\varphi(x)$ ставится в биективное соответствие последовательность чисел a_k.

В комбинаторном анализе часто приходится сталкиваться с задачами оперирования числовыми последовательностями, отвечающими различным комбинаторным конфигурациям. Например, могут потребоваться вычисление суммы биномиальных коэффициентов с различными весами, как-то:

$$\Sigma_{k=0}^{n} C_n^k, \quad \Sigma_{k=0}^{n} kC_n^k.$$

а также вычисления произведений рядов, составленных из этих коэффициентов, и др. В таком случае часто оказывается возможным упростить процесс получения результата, если сопоставить с комбинаторной последовательностью $\{a_k\}$ функцию, определяемую формальным рядом

$$f(x) = \Sigma_{k=0}^{n} a_k x^k. \tag{3.19}$$

Такая $f(x)$ именуется *производящей функцией.*

Если в ряде (3.19) все a_k, начиная с некоторого k, равны нулю, то суммирование осуществляется в конечных пределах, и построенная таким образом производящая функция носит название *полиномиальной.*

Для произвольных производящих функций

$$f_a(x) = \Sigma_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \text{и} \quad f_b(x) = \Sigma_{k=0}^{n} b_k x^k$$

определены операции сложения:

$$f_a(x) + f_b(x) = \Sigma_{k=0}^{n} (a_k + b_k)\, x^k, \tag{3.20}$$

умножения на число

$$\lambda f(x) = \Sigma_{k=0}^{n} \lambda a_k x^k \tag{3.21}$$

и произведение Коши

$$f_a(x)\, f_b(x) = \Sigma_{k=0}^{n} c_k x^k, \tag{3.22}$$

где $c_k = \Sigma_{i=0}^{k}(a_i b_{k-i})$.

Поясним применение производящих функций на примере исследования свойств сочетаний.

Пусть x_1, x_2, ..., x_n — элементы n-X множества. Составим произведение

$$f(x) = (1 + x_1 x)(1 + x_2 x)...(1 + x_n x).$$

Раскрываем в этом произведении скобки:

$$f(x) = 1 + (x_1 + x_2 + ... + x_n)x +$$
$$+ (x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n)x^2 + ... + (x_1x_2...x_n)x^n. \quad (3.23)$$

В этой формуле каждое слагаемое $x_1x_2...x_k$ $(1 < k \le n)$ можно считать k-сочетаниями из n элементов $x_1, x_2, ..., x_n$. Число таких сочетаний равно C_n^k. Полагая в (3.23) значения $x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$, получим

$$f(x) = \Sigma_{k=0}^{n} C_n^k x^k = (1 + x)^n . \quad (3.24)$$

В данном случае производящей функцией последовательности C_n^k является функция $(1 + x)^n$. Это частный случай бинома Ньютона, с которым мы встречались в 3.5.

Полагая $x = 1$, как и в (3.13), получим

$$\Sigma_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n. \quad (3.25)$$

Подставляя, например в формулу (3.24) $x = -1$, видим, что коэффициенты C_n^k обладают следующим свойством

$$\Sigma_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0. \quad (3.26)$$

Это свойство вытекает из симметрии коэффициентов C_n^k и C_n^{n-k}, однако с помощью производящих функций оно доказывается проще, чем комбинаторными рассуждениями.

Докажем еще тождество

$$C_{n+m}^k = \Sigma_{s=0}^{k} C_m^s C_n^{k-s}. \quad (3.27)$$

Для доказательства воспользуемся производящей функцией

$$(1 + x)^{n+m} = (1 + x)^n(1 + x)^m.$$

Перемножив соответствующие ряды по правилу произведения Коши, получим производящую функцию

$$\Sigma_{k=0}^{n} C_n^k x^k \;\; \Sigma_{k=0}^{m} C_m^k x^k = \Sigma_{k=0}^{m=n} \Sigma_{k=0}^{n} C_m^s C_n^{k-s} x^k,$$

для которой

$$C_{n+m}^k = \Sigma_{s=0}^{k} C_m^s C_n^{k-s},$$

что в точности совпадает с (3.27).

Ниже приведено комбинаторное доказательство этого же факта, которое выглядит более громоздко.

Предположим, что в урне имеется $n + m$ шаров: n — белых и m — красных. Выбор k шаров можно выполнить C_{n+m}^k способами. При этом все k-подмножества можно классифицировать по числу шаров одного цвета, например красного. Любое k-подмножество, содержащее s красных шаров, можно получить, выбирая s красных шаров одним из C_m^s способов, а затем $k-s$ белых шаров — одним из C_n^{k-s} способов. Таким образом, число всех подмножеств, включающих s красных шаров, равно $C_m^s C_n^{k-s}$. Суммируя это произведение от 0 до k, получим тождество (3.27).

Эти примеры показывают, что производящие функции позволяют в ряде случаев упростить доказательства комбинаторных построений.

3.7. Соединения с повторениями

Задача построения всех размещений из n элементов по r рассмотрена в 3.1 — 3.3. Показано, что число всех размещений равно n^r, а среди них A_n^r — инъективных. Остальные $n^r - A_n^r$ размещений определим как *размещения с повторениями*. Отметим, что в случае, когда $r > n$, согласно (3.6), $A_n^r = 0$ и можно считать, что все n^r размещений являются размещениями с повторениями.

Рассмотрим, что подразумевают под *перестановками и сочетаниями с повторениями*.

Задача построения перестановок с повторениями состоит в следующем.

Пусть множество n-X состоит из элементов различных видов и при этом имеем k_i неразличимых элементов i-ого вида ($i = 1, q$), таких, что $k_1 + k_2 + ... + k_q = n$.

Например, 6-X множество может иметь следующую структуру:

$$X = \{1, 1, 1, 2, 2, 3\}.$$

Тогда $k_1 = 3$, $k_2 = 2$, $k_3 = 1$.

Построим на n-X все перестановки и определим мощность этого множества.

Теорема 3.5. Если множество n-X состоит из элементов различных видов и при этом имеем k_i неразличимых элементов i-ого вида ($i = 1, q$), таких, что $k_1 + k_2 + ... + k_q = n$, то число всех перестановок с повторениями равно

$$n! \,/\, (k_1!\, k_2!\, ... k_n!). \qquad (3.28)$$

Доказательство. Преобразуем n-X в индексированное множество n-X', присвоив каждому элементу n-X' индекс, равный его порядковому номеру. Например, для n-X из приведенного выше примера будем иметь

$$n\text{-}X' = \{1^1, 1^2, 1^3, 2^4, 2^5, 3^6\}.$$

Далее будем считать, что элементы n-X', имеющие разные индексы, также различны. В таком случае мощность множества всех перестановок n-X' равна $n!$.

Заметим, что каждый элемент полученного множества перестановок включает в себя все отмеченные элементы k_1-подмножества X. Учитывая это, аннулируем индексацию на элементах k_1-подмножества. В результате имеем разбиение всего множества $n!$ перестановок на классы эквивалентных (в данном случае попарно совпадающих) элементов. Поскольку элементы k_1-подмножества можно переставлять $k_1!$ различными способами, то столько же элементов будет содержать каждый из классов. Следовательно, всего таких классов будет $n!/\ k_1!$. Составим из представителей данного класса множество мощности $n!/\ k_1!$, а затем последовательно применим к нему процесс аннуляции индексов, описанный выше для k_2, ..., k_q-подмножеств. В результате имеем множество перестановок с повторениями мощности $n!/(k_1!\ k_2!\ ...k_n!)$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим пример.

Пусть 4-X = {2, 2, 3, 3}. Проиндексируем все элементы этого множества: $\{2^1, 2^2, 3^3, 3^4\}$, и построим все его перестановки, рассматривая его элементы как попарно различные. В таком случае имеем 4! = 24 элемента всех перестановок:

$\langle 2^1 2^2 3^3 3^4\rangle$ $\langle 2^1 2^2 3^4 3^3\rangle$ $\langle 2^1 3^3 2^2 3^4\rangle$ $\langle 2^1 3^4 3^3 2^2\rangle$ $\langle 2^1 3^4 2^2 3^3\rangle$ $\langle 2^1 3^3 2^2 3^4\rangle$
$\langle 2^2 2^1 3^3 3^4\rangle$ $\langle 3^3 2^2 2^1 3^4\rangle$ $\langle 3^4 2^2 3^3 2^1\rangle$ $\langle 2^2 2^1 3^4 3^3\rangle$ $\langle 3^4 2^2 2^1 3^3\rangle$ $\langle 3^3 2^2 3^4 2^1\rangle$
$\langle 3^3 2^1 2^2 3^4\rangle$ $\langle 2^2 3^3 2^1 3^4\rangle$ $\langle 3^4 3^3 2^2 2^1\rangle$ $\langle 3^4 2^1 3^3 2^2\rangle$ $\langle 3^3 3^4 2^1 2^2\rangle$ $\langle 2^2 3^4 3^3 2^1\rangle$
$\langle 3^4 2^1 2^2 3^3\rangle$ $\langle 2^2 3^4 2^1 3^3\rangle$ $\langle 3^3 3^4 2^2 2^1\rangle$ $\langle 3^3 2^1 2^2 3^4\rangle$ $\langle 2^2 3^3 2^1 3^4\rangle$ $\langle 3^4 3^3 2^2 2^1\rangle$.

Аннулировав индексацию, получим
⟨2233⟩ ⟨2233⟩ ⟨2323⟩ ⟨2332⟩ ⟨2323⟩ ⟨2323⟩
⟨2233⟩ ⟨3223⟩ ⟨3232⟩ ⟨2233⟩ ⟨3223⟩ ⟨3232⟩
⟨3223⟩ ⟨2323⟩ ⟨3322⟩ ⟨3232⟩ ⟨3322⟩ ⟨2332⟩
⟨3223⟩ ⟨2323⟩ ⟨3322⟩ ⟨3223⟩ ⟨2323⟩ ⟨3322⟩.

Выделив представителей классов эквивалентностей, получим все перестановки с повторениями:

⟨2233⟩ ⟨2323⟩ ⟨2332⟩ ⟨3223⟩ ⟨3232⟩ ⟨3322⟩.

Всего перестановок в рассмотренном примере имеем

$$4!\ /\ (2!2!) = 6.$$

Рассмотрим задачу построения сочетаний с повторениями.

Пусть имеем отображение F: r-$X \to n$-Y. При этом соотношения между r и n могут быть выбраны произвольно: $r < n$, $r = n$ или $r > n$. Скажем, что элементы $y, y' \in Y$ эквивалентны, если найдется такая подстановка f, что $y' = f(y)$.

Как и в 3.4, доказывается, что это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно, а следовательно, разбивает все множество размещений на классы эквивалентных элементов.

Обозначим число этих классов $\hat{C}_n^r$.

Рассмотрим пример. Пусть $n = r = 3$. Построив все размещения, получим

$\langle 111\rangle\ \langle 112\rangle\ \langle 113\rangle\ \langle 121\rangle\ \langle 122\rangle\ \langle 123\rangle\ \langle 131\rangle\ \langle 132\rangle\ \langle 133\rangle$
$\langle 211\rangle\ \langle 212\rangle\ \langle 213\rangle\ \langle 221\rangle\ \langle 222\rangle\ \langle 223\rangle\ \langle 231\rangle\ \langle 232\rangle\ \langle 233\rangle$
$\langle 311\rangle\ \langle 312\rangle\ \langle 313\rangle\ \langle 321\rangle\ \langle 322\rangle\ \langle 323\rangle\ \langle 331\rangle\ \langle 332\rangle\ \langle 333\rangle$.

Разбивая это множество элементов на классы, заметим, что число элементов в каждом классе будет, вообще говоря, различным. Это следует из различной повторяемости компонент, составляющих каждую перестановку. Например, класс, определяемый элементом 111, будет представлен в единственном числе, поскольку любая перестановка переводит этот элемент в себя. Класс, определяемый представителем 122, согласно (3.28), состоит из трех элементов, поскольку $n!/(k_1!k_2!) = 3!/(2!1!) = 3$, и т. д.

В рассматриваемом нами примере разбиение на классы можно выполнить так, как показано в левой части рис. 3.5. На этом рисунке все сочетания с повторениями выделены курсивом.

⟨111⟩	⟨123⟩
⟨112⟩ ⟨121⟩ ⟨211⟩	⟨124⟩
⟨113⟩ ⟨131⟩ ⟨311⟩	⟨125⟩
⟨122⟩ ⟨212⟩ ⟨221⟩	⟨134⟩
⟨123⟩ ⟨132⟩ ⟨213⟩ ⟨231⟩ ⟨312⟩ ⟨321⟩	⟨135⟩
⟨133⟩ ⟨313⟩ ⟨331⟩	⟨145⟩
⟨222⟩	⟨234⟩
⟨223⟩ ⟨232⟩ ⟨322⟩	⟨235⟩
⟨233⟩ ⟨323⟩ ⟨332⟩	⟨245⟩
⟨333⟩	⟨345⟩

Рис. 3.5

В общем случае выберем представитель $y = \langle y_1, y_2, \ldots, y_r\rangle$ любого класса так, чтобы было выполнено $y_1\, y_2 \ldots y_r$. Далее, следуя Эйлеру, поставим в биективное соответствие сочстаниям с повторениями сочетания без повторений по правилу:

$$\langle y_1, y_2, \ldots, y_r\rangle \Leftrightarrow \langle y_1, y_{2+1}, \ldots, y_r + (r-1)\rangle. \qquad (3.29)$$

В нашем примере соответствующая биекция представлена левой и правой частями рис. 3.5.

Число всех сочетаний без повторений в условиях (3.29) определится как C^r_{n+r-1}. Следовательно, столько же имеем сочетаний с повторениями.

На основании проведенных рассуждений имеем теорему.

Теорема 3.6. Сочетания с повторениями из n элементов по r эквивалентны множеству всех классов размещений, инвариантных относительно всех перестановок входящих в них элементов. Число этих классов равно

$$\bar{C}^r_n = C^r_{n+r-1} = (n + r - 1)! \,/\, (r!(n - 1)!). \qquad (3.30)$$

Из (3.30), в частности, следует, что $C^r_{n+r-1} = C^{n-1}_{n+r-1}$.

3.8. Разбиения множеств

Под *разбиением* множества n-X на k блоков понимают любое семейство непустых множеств $\{X_1, X_2, ..., X_k\}$, таких, что $X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_k = n$-$X$ и $X_i \cap X_j = \varnothing$ для любых $i, j \le k$.

Например, множество {1, 2, 3, 4} можно разбить на два блока следующими способами:

{{1, 2, 3}, {4}}, {{1, 2, 4}, {3}}, {{1, 3, 4}}, {2}},
{1, 2}, {3, 4}}, {{1, 3}, {2, 4}}, {{1, 4}, {2, 3}},
{{1}, {2, 3, 4}}.

Теорема 3.7. Пусть $S(n, k)$ — число разбиений множества n-X на k блоков. Тогда вычисление $S(n, k)$ может быть выполнено рекурсивно на основе тождеств:

$$S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + kS(n - 1, k),$$
$$\text{если } 0 < k < n, \qquad (3.31)$$
$$S(n, n) = 1, \text{ если } n = 0, \qquad (3.32)$$
$$S(n, 0) = 0, \text{ если } n > 0. \qquad (3.33)$$

Доказательство. Формулы (3.32) и (3.33) очевидны. Для доказательства (3.31) рассмотрим множество всех разбиений n-X на k подмножеств.

Это множество можно представить двумя непересекающимися классами: тех разбиений, которые содержат одноэлементный блок $\{n\}$, и тех, которые его не содержат. В этом случае n содержится по крайней мере в двухэлементном блоке. Мощность первого класса равна $S(n-1, k-1)$, т. е. такова, каково число разбиений множества $\{1, 2, ..., n-1\}$ на $k-1$ блоков. Мощность второго класса равна $kS(n-1, k)$, поскольку каждому разбиению множества $\{1, 2, ..., n-1\}$ на k блоков соответствует в этом классе ровно k разбиений, образованных добавлением элемента n поочередно к каждому блоку. Доказательство окончено.

Числа $S(n, k)$ называются *числами Стирлинга второго рода.* Рассчитанные по формулам (3.31) — (3.33), они могут быть представлены в виде треугольной таблицы — *треугольника Стирлинга.* Треугольник Стирлинга для значений n от 0 до 7 представлен в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Числа Стирлинга второго рода

n	k							
	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0	0
3	0	1	3	1	0	0	0	0
4	0	1	7	6	1	0	0	0
5	0	1	15	25	10	1	0	0
6	0	1	31	90	65	15	1	0
7	0	1	63	301	350	140	21	1

Числа Белла определяются как сумма всех разбиений от 0 до n блоков множества n-X:

$$X_n = \Sigma_{k=0}^{n} S(n, k). \tag{3.34}$$

Первые восемь чисел Белла представлены в табл. 3.2

При подсчете числа разбиений необходимо иметь в виду, что числа Белла растут очень быстро. Так, например, уже при $n = 20$ $B_n = 51\ 724\ 158\ 235\ 372$.

Таблица 3.2

Числа Белла

n	0	1	2	3	4	5	6	7
B_n	1	1	2	5	15	52	203	877

Рассмотрим вопрос о построении алгоритма разбиений.

Каждому разбиению множества n-X на k блоков можно сопоставить функцию F, отображающую множество значений каждого блока разбиений на его номер в множестве k-Y. Благодаря нашему построению каждая такая функция сюръективна.

Поскольку любое разбиение инвариантно относительно всех перестановок составляющих его блоков, то каждому разбиению будет соответствовать в точности $k!$ различных сюръективных функций, отвечающих различным перестановкам номеров блоков разбиения множества n-X. Другими словами, каждому разбиению множества n-X на k блоков соответствует свой класс эквивалентности, построенный на множестве всех сюръективных функций из n-X на k-Y, инвариантный относительно всех перестановок элементов k-Y на фиксированных блоках n-X.

Обратно, всякой сюръективной функции $F{:}n\text{-}X \to k\text{-}Y$ можно поставить в соответствие некоторое разбиение множества n-X на k блоков. Для этого объединим в один блок $X_i \subset n\text{-}X$, $(i = 1, k)$ те значения из n-X, которые функцией F отображаются на одно и то же значение из k-Y. По нашему построению ни один из k полученных блоков не пуст, пересечение всех этих k блоков пусто, а их объединение составляет n-X. Следовательно, множество блоков $\{X_1, X_2, ..., X_k\}$, определенное поставленным соответствием, представляет разбиение n-X.

Определим на множестве $\{X_1, X_2, ..., X_k\}$ функцию F^*, которая отображает любой блок X_i на свой собственный номер i. Ясно, что F^* биективна на всяком фиксированном множестве блоков $\{X_1, X_2, ..., X_k\}$. С другой стороны, любая из F^* однозначно связана с F: она может быть получена из F путем объединения в один блок $X_i \subset n\text{-}X$, $(i = 1, k)$ тех значений из n-X, которые функцией F отображаются на одно и то же значение из k-Y.

Проведенные выше рассуждения позволяют сформулировать алгоритм построения всех разбиений множества n-X:

1. Построить на множестве всех сюръективных функций $F{:}n\text{-}X \to k\text{-}Y$ все классы эквивалентности, инвариантные всевозможным перестановкам элементов k-Y, и выбрать по представителю этих классов.

2. Каждому представителю класса F поставить в соответствие биективную функцию F^* с областью определения, получаемой путем объединения в один блок $X_i \subset n\text{-}X$, $(i = 1, k)$ тех значений из n-X, которые функцией F отобра-

жаются на одно и то же значение из k-Y и областью значений k-Y, т. е. для каждой функции F построить такую функцию F^*, что $F^*:\{X_1, X_2, ..., X_r\} > k\text{-}Y$.

3. Для каждой из F^* построить искомые блоки, на основании биекции F^*:

$$\{X_1, X_2, ..., X_r\} = F^{*\,-1}(k\text{-}Y).$$

Из рассмотренного выше следует, что имеет место зависимость между числами $S(n, k)$ и множеством всех сюръективных функций F из n-X на k-Y: каждому разбиению соответствует свой класс эквивалентности, определяемый всевозможными перестановками блоков разбиения. Поэтому, обозначив символами $s_{n,k}$ множество всех функций F, получим, что

$$S(n, k) = s_{n,k} / k!. \qquad (3.35)$$

В качестве примера рассмотрим применение рассмотренного выше алгоритма к построению всех разбиений множества n-X = {1, 2, 3, 4} на два блока.

На рис. 3.6 приведены значения всех функций, определенных на 4-X со значениями в 2-Y. Подмножество сюръективных функций F выделено полужирным шрифтом.

Множество n-X представлено верхними прямоугольными областями, представители всех классов эквивалентности — левой прямоугольной областью. Каждому представителю класса эквивалентности соответствует дополнение класса.

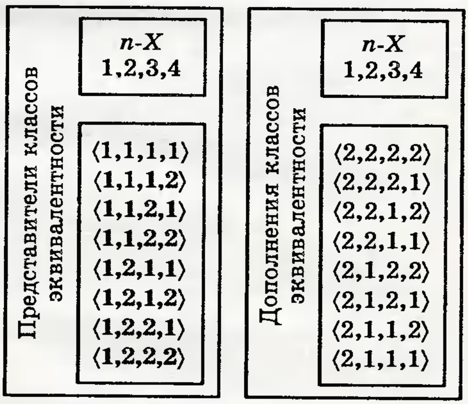


Рис. 3.6

Дополнения показаны правой прямоугольной областью. В нашем примере в каждом классе эквивалентности имеем всего $k! = 2! = 2$ элемента. Представитель каждого класса и его дополнение представлены в одной строке.

На рис. 3.7 слева изображены представители классов эквивалентности, образованные множеством функций F, а справа — искомые блоки разбиения множества n-X. Эти блоки получены путем построения всех отображений F^{*-1}: $\{X_1, X_2, \ldots, X_r\} = F^{*-1}(k\text{-}Y)$.

n-X
1,2,3,4
⟨1,1,1,2⟩
⟨1,1,2,1⟩
⟨1,1,2,2⟩
⟨1,2,1,1⟩
⟨1,2,1,2⟩
⟨1,2,2,1⟩
⟨1,2,2,2⟩

k-Y 1	2
{1,2,3}	{4}
{1,2,4}	{3}
{1,2}	{3,4}
{1,3,4}	{2}
{1,3}	{2,4}
{1,4}	{2,3}
{1}	{2,3,4}

Рис. 3.7

3.9. Разбиения чисел

Под разбиением числа n понимается его представление в виде

$$n = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$$
$(x_i > 0$ — целое).

При этом порядок слагаемых не существенен, а

$$x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_k.$$

Суммы считаются эквивалентными, если они отличаются лишь порядком слагаемых.

Число разбиений числа n на k слагаемых будем обозначать $P(n, k)$, а число всех разбиений — $P(n)$.

Очевидно, что

$$P(n) = \Sigma_{k=1}^{n} P(n, k),\ n > 0. \qquad (3.36)$$

k	Разбиения n							$P(n,k)$
1	7							1
2	6	1						3
	5	2						
	4	3						
3	5	1	1					4
	4	2	1					
	3	3	1					
	3	2	2					
4	4	1	1	1				3
	3	2	1	1				
	2	2	2	1				
5	3	1	1	1	1			2
	2	2	1	1	1			
6	2	1	1	1	1	1	1	
7	1	1	1	1	1	1	1	1

Рис. 3.8

Рассмотрим пример. Пусть необходимо получить все разбиения числа $n = 7$. Это возможно сделать различными способами, показанными на рис. 3.8.

Разложение $P(n)$ в сумму $P(n, k)$ делает наглядной структуру разбиений числа n, однако вычисление значений $P(n)$ непосредственно по формуле (3.36) не всегда возможно, поскольку сами значения $P(n, k)$ заранее, как правило, неизвестны.

Для подсчета $P(n)$ удобно воспользоваться функцией $Q(m, n)$, значением которой является число способов представления целого m в виде суммы при условии, что каждое слагаемое не превосходит n. Число разбиений целого n равно $Q(n, n) = P(n)$.

Теорема 3.8. Пусть $Q(m, n)$ — функция, значением которой является число способов представления целого m в виде суммы при условии, что каждое слагаемое не превосходит n. Тогда функция $Q(m, n)$ удовлетворяет следующему рекурсивному определению:

$$\begin{gathered} Q(m, n) = [(m = 1) \vee (n = 1) \to 1, \\ (m < n) \to Q(m, m - 1), \\ (m = n) \to 1 + Q(m, m - 1), \\ (m > n) \to Q(m, n - 1) + Q(m - n, n)]. \end{gathered} \tag{3.37}$$

Доказательство. Такое определение функции Q вытекает из следующих рекурсивных рассуждений.

- Если $n = 1$, то $Q(m, 1) = 1$, поскольку существует только одно разбиение числа m, в котором наибольшее слагаемое есть единица.
- Если $m = 1$, то $Q(1, n) = 1$, так как существует только одно разбиение целого числа 1, независимо от величины n как наибольшего слагаемого.
- Если $m < n$, то $Q(m, n) = Q(m, m)$ означает, что никакое разбиение m не может содержать слагаемого n, большего m.
- Если $n = m$, то $Q(m, m) = 1 + Q(m, m - 1)$ определяет существование только одного разбиения m со слагаемым, равным m; при этом все другие разбиения имеют наибольшее слагаемое $n \le m - 1$.
- Если $m > n$, то $Q(m, n) = Q(m, n - 1) + Q(m - n, n)$, поскольку любое разбиение m с наибольшим слагаемым, меньшим или равным n, либо не содержит n в качестве слагаемого — в этом случае данное разбиение также вхо-

дит в число $Q(m, n-1)$, либо содержит n — при этом остальные слагаемые образуют разбиение числа $m-n$.

Доказательство окончено.

При исследовании свойств чисел $P(n)$ могут также оказаться полезными *диаграммы Ферерса*. Диаграмма Ферерса состоит из k строк, соответствующих слагаемым разбиения, причем i-ая строка содержит последовательность из x_i точек.

Например, разлагая 7 на четыре слагаемых, имеем одну из диаграмм Ферерса (рис. 3.9).

$$\begin{array}{ll} k\left\{\begin{array}{lll}\bullet&\bullet&\bullet\\ \bullet&\bullet&\\ \bullet&&\end{array}\right. & \\ \quad\;\bullet & \qquad 7 = 3 + 2 + 1 + 1\end{array}$$

Рис. 3.9

Каждому разбиению, изображенному диаграммой Ферерса соответствует *сопряженное* разбиение, которое получается заменой строк столбцами (рис. 3.10).

$$\begin{array}{ll} \overbrace{\bullet\quad\bullet\quad\bullet}^{k}\quad\bullet & \\ \bullet\quad\bullet & \\ \bullet & \\ \bullet & \qquad 7 = 4 + 2 + 1\end{array}$$

Рис. 3.10

Непосредственно из определения диаграммы Ферерса следует, что *число разбиений числа n на k слагаемых равно числу разбиений числа n с наибольшим слагаемым, равным k.*

Некоторые другие полезные утверждения, основанные на построении диаграмм Ферерса, приведены в [3].

Получим алгоритм генерирования всех разбиений числа n.

Пусть $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$. Обозначим $s \le n$ такое, что

$$s = \begin{cases} a_i + \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{k-j}, & \text{если } k > j, \\ a_i & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $i = \max(m\colon a_m > 1)$, $j = a_i - 1$.

Для построения этого алгоритма достаточно заметить, что разбиение s', непосредственно следующее за s, имеет вид

$$s' = \Sigma_1^{\lfloor s/j \rfloor} j + (s \bmod j),$$

где символами $\lfloor s/j \rfloor$ обозначено наибольшее целое, не превосходящее s / j.

При этом все элементы разбиения n: $a_1, a_2, ..., a_{i-1}$ являются общими как для s, так и для s'.

Инициация алгоритма осуществляется значениями $i = 1$, $a_i = n$, $j = n - 1$, $k = 1$.

3.10. Композиции чисел

Под композицией числа n на k слагаемых $x_1, x_2, ..., x_n$ понимают k перестановку (вообще говоря, с повторениями), удовлетворяющую условию

$$n = x_1 + x_2 + ... + x_n.$$

Выпишем, например, все композиции числа 3:

$$3 = 3,\ 3 = 2 + 1,\ 3 = 1 + 2,\ 3 = 1 + 1 + 1.$$

Число композиций $\Psi(k, n)$ числа n из k слагаемых равно числу способов распределения n шаров по k урнам при условии отсутствия пустых урн. Число шаров, попавших в урну с номером i, дает слагаемое x_i. Отсюда следует, что

$$\Psi(k, n) = C_{n-1}^{k-1}.$$

Следовательно, число всех композиций числа n равно

$$\Sigma_{1 \le k \le n} \Psi(k, n) = \Sigma_{1 \le k \le n} C_{n-1}^{k-1} = 2^{n-1}.$$

Предположим, что $n_1, n_2, ..., n_k$ — целые положительные числа. Обозначим через $f(n)$ количество всех композиций вида: $n = x_1, x_2, ..., x_m$, где m произвольно, а части x_i принимают любое из значений $n_1, n_2, ..., n_k$.

Количество тех композиций числа n, в которых последней частью является n_i, очевидно равно $f(n - n_i)$. Следовательно,

$$f(n) = f(n - n_1) + f(n - n_2) + ... + f(n - n_k). \quad (3.38)$$

При этом $f(0) = 1$ и $f(n) = 0$, если $n < 0$. Пусть, например, $n_1 = 4$, $n_2 = 6$, $n_3 = 10$. Тогда

$$f(0) = 1;\ f(1) = f(2) = f(3) = 0,\ f(4) = 1,\ f(5) = 0,\ f(6) = 1,$$
$$f(7) = 0,\ f(8) = f(4) + f(2) = 1,\ f(9) = 0,$$
$$f(10) = f(6) + f(4) + f(0) = 3,$$
$$f(11) = f(7) + f(5) + f(1) = 0 \text{ и т. д.}$$

К рассматриваемой задаче сводится решение вопроса, возникающего в теории информации. По информационному каналу передаются электронные документы нескольких типов. Длительность передачи каждого типа документов равна соответственно n_1, n_2, ..., n_k единиц времени. Какое общее число документов можно передать за промежуток времени длиной n? Это количество $f(n)$ можно подсчитать, пользуясь рекуррентной формулой (3.38).

Задачи

3.1. Электронные документы передаются по семи каналам связи из пункта A в пункт B. В пункте B документы редактируются и передаются обратно в пункт A.

а) Сколькими способами можно передать документ из пункта A в пункт B и обратно?

б) Дать ответ на тот же самый вопрос, если документ не может вернуться в пункт A по тому же каналу, по которому он был передан в пункт B.

3.2. В борьбе за призовые места на студенческой олимпиаде по информационным технологиям участвуют 16 команд. Сколькими способами могут быть распределены первое и второе место?

3.3. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если:

а) ни одна из цифр не повторяется более одного раза;

б) цифры могут повторяться;

в) числа должны быть нечетными (цифры могут повторяться)?

3.4. Сколько имеется пятизначных чисел, которые делятся на пять?

3.5. На одной из боковых сторон треугольника взято n точек, на другой — m точек. Каждая из вершин при основании треугольника соединена прямыми с точками, взятыми на противоположной стороне:

а) сколько точек пересечения этих прямых образуется внутри треугольника?

б) на сколько частей делят треугольник эти прямые?

3.6. Сколько существует двузначных чисел, у которых обе цифры четные?

3.7. Сколько существует пятизначных чисел, у которых все цифры нечетные?

3.8. В прямоугольной таблице из m строк и n столбцов записаны числа +1 и −1 так, что произведение чисел в каждой строке и каждом столбце равно 1. Сколькими способами можно таким образом заполнить таблицу?

3.9. В электронной библиотеке имеется 10 статей по заданной тематике. Сколькими способами можно скопировать три статьи на диск на локальном компьютере?

3.10. В электронной папке содержится 5 документов. Выбранный наугад документ копируется в другую папку, после чего еще один выбранный наугад документ копируется на дискету. Сколькими способами можно проделать эти операции?

3.11. Сколькими способами можно разместить на полке 5 книг?

3.12. Сколькими способами можно разместить элементы множества $\{1, 2, ..., 2n\}$ так, чтобы каждое четное число имело четный номер?

3.13. Сколько можно составить перестановок из n книг, в которых данные 2 книги не стоят рядом?

3.14. Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не могли бить друг друга?

3.15. Сколькими способами можно разместить 4 документа на 25 местах?

3.16. Учащемуся необходимо сдать 4 экзамена на протяжении 8 дней. Сколькими способами это можно сделать?

3.17. Имеется 10 электронных документов, три из которых нужно поместить в очередь на печать на лазерном принтере. Сколькими способами это можно сделать?

3.18. Имеется 5 компьютеров и 4 пользователя. Сколькими способами можно распределить пользователей по компьютерам, если каждому пользователю должен достаться компьютер и не разрешается работать двум пользователям за одним компьютером?

3.19. Имеется 10 символов, которые можно использовать для составления двухбуквенного кода электронного документа. Сколько кодов можно составить из этих символов?

3.20. В библиотеке 5 книг по информационным технологиям. Сколькими способами можно выбрать из них 3 книги?

3.21. Сколькими способами из 7 документов можно выбрать 3?

3.22. В компьютерной сети работают n пользователей, причем каждый из них связался с остальными по E-mail в течение одного часа один раз. Сколько сеансов связи пользователей друг с другом произошло в течение этого часа?

3.23. В скольких точках пересекаются диагонали выпуклого n-угольника, если никакие 3 из них не пересекаются в одной точке?

3.24. Дано n точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Сколько прямых можно провести, соединяя точки попарно?

3.25. На плоскости проведено n прямых так, что никакие 2 из них не параллельны и никакие 3 не пересекаются в одной точке:

а) найти количество точек пересечения этих прямых;

б) сколько треугольников образуют эти прямые?

в) на сколько частей делят плоскость эти прямые?

г) сколько среди них ограниченных частей и сколько неограниченных?

3.26. Сколько имеется четырехзначных чисел, у которых каждая следующая цифра больше предыдущей?

3.27. Сколько существует четырехзначных чисел, у которых каждая следующая цифра меньше предыдущей?

3.28. В выпуклом n-угольнике проведены все диагонали. Известно, что никакие три из них не пересекаются в одной точке. На сколько частей разделится при этом многоугольник?

3.29. В компьютерном классе имеется 6 компьютеров. Для научного эксперимента требуется отобрать 4 компьютера. Сколькими способами можно это сделать?

В задачах **3.30 — 3.32** получить производящие функции для следующих последовательностей:

3.30. $a_n = a^n$, $(n = 0, 1, ...)$.

3.31. $a_k = C_n^k$, $(k = 0, 1, ..., n)$.

3.32. $a_k = C_{n+k}^k$, $(k = 0, 1, ...)$.

3.33. Сколько всего различных неупорядоченных пар цифр можно выбрать из цифр 0, 1, 2, ..., 6?

3.34. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове «математика»?

4. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

4.1. Основные понятия и определения

Пусть дано множество $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ и в V определено семейство $U = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$ пар элементов $u_k = \{v_i, v_j\}$, $(k = \overline{1, m})$ произвольной кратности и упорядочения. Пара $\{V, U\}$ называется *граф*. Графы, как правило, обозначают прописными латинскими буквами, например G, H. Принято также писать $G(V, U)$ для того, чтобы определить некоторый конкретный граф G.

Элементы $v_1, v_2, ..., v_n$ называются *вершинами* графа, а пары $u_k = \{v_i, v_j\}$, $(k = \overline{1, m})$ — *ребрами*.

Определению графа можно дать следующую интерпретацию. Пусть имеем описание графа:

$$G(V,E) = \{\{ v_1, v_2, ..., v_6\}, \{ \{ v_1, v_3 \}, \langle v_5, v_1\rangle, \{v_3, v_4\}, \langle v_2, v_3\rangle, \{v_3, v_3 \}\}\}.$$

Это описание можно отобразить графически, как показано на рис. 4.1. На этом рисунке некоторые ребра отмечены стрелкой, а соответствующие им пары вершин в описании графа выделены угловыми скобками. Это связано с тем, что для некоторого произвольного ребра можно принимать или не принимать во внимание порядок расположения его концов.

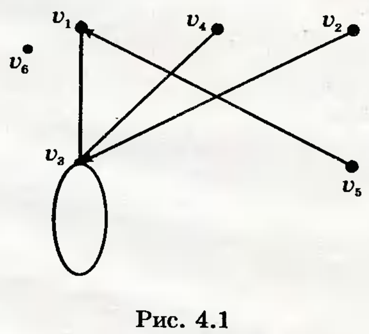


Рис. 4.1

Если этот порядок не существенен, то ребро называется *неориентированным*, в противном случае ребро называется *ориентированным*. Ориентированные ребра называются также *дугами*.

Для ориентированного ребра определены понятия *начальной* и *конечной вершины*. Начальная вершина записывается в начале пары вершин, определяющих дугу, а конечная — в конце. Так, на рис. 4.1 ребра $\langle v_5, v_1\rangle$ и $\langle v_2, v_3\rangle$ являются дугами. Они представлены упорядоченными парами вершин и в связи с этим обозначены так же, как обозначаются упорядоченные множества.

Ребра $\{v_1, v_3\}$, $\{v_3, v_4\}$ неориентированы. Для любого неориентированного ребра полагают, что $\{v_i, v_j\} = \{v_j, v_i\}$ так же, как и в случае неупорядоченных множеств. Ребро $\{v_i, v_i\}$ называется *петлей*. На рис. 4.1 имеем петлю $\{v_3, v_3\}$. Петли обычно неориентированы.

Граф, у которого все ребра неориентированы, называется *неориентированным*. Неориентированное ребро может быть эквивалентно паре ориентированных ребер, если это возможно по условию задачи.

Граф, у которого все ребра ориентированы, называется *ориентированным* или *орграфом*.

На рис. 4.1 приведен *смешанный* граф, т. е. содержащий как ориентированные, так и неориентированные ребра и петлю.

Многие теоремы и определения в теории графов могут быть отнесены как к ориентированным, так и к неориентированным графам. В таких случаях для обозначения ребер применяют круглые скобки, например ребро $\{v_3, v_4\}$ в графе рис. 4.1 можно обозначать (v_3, v_4) либо (v_4, v_3), а ребро $\langle v_5, v_1\rangle$ — соответственно как (v_5, v_1), указав при этом, что данное ребро представляет дугу. Принято также обозначение всех ребер круглыми скобками как в случае ориентированных графов, так неориентированных, если совершенно ясно, о каком из типов этих графов идет речь в тексте.

Некоторые вершины графа G могут не войти в список пар. Такие вершины называются *изолированными*. В рассмотренном примере это вершина v_6. Граф, у которого все вершины изолированы, называется *нуль-графом*. Множество ребер такого графа пусто.

Антиподом нуль-графа является *полный граф*. Ребрами полного графа являются все возможные пары его вершин.

Как в случае ориентированного графа, так и в случае неориентированного, говорят, что ребро *инцидентно* паре определяющих его вершин.

Одной и той же паре вершин можно поставить в соответствие множество инцидентных ребер. Такие ребра называются *кратными*. Так, на рис. 4.2 представлена пара вершин (v_i, v_j), инцидентных трем различным ребрам u_1, u_2, u_3. Одно из них направлено, а два — нет.

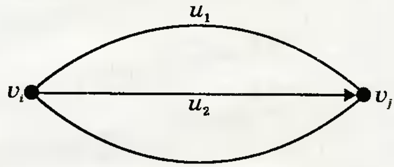


Рис. 4.2

Граф называется *плоским*, если он может быть изображен на плоскости так, что все пересечения ребер есть его вершины. Так, граф, приведенный на рисунке 4.1, плоским не является, а на рис. 4.2, — плоский.

Если граф G представлен конечным множеством ребер, то он называется *конечным*, независимо от числа вершин. В противном случае граф называется *бесконечным*.

Граф H называется *частью графа* G или *частичным графом* $H \subset G$, если множество его вершин $V(H)$ содержится в множестве вершин $V(G)$ графа G и все ребра H являются ребрами G. Частным, но важным типом частичных графов являются подграфы.

Пусть A — подмножество множества вершин V графа G. *Подграф* $G(A)$ графа G есть такая часть графа, множеством вершин которого является A, а ребрами — все ребра из G, оба конца которых лежат в A.

Для любой части H графа определена *дополнительная* часть H (дополнение), состоящая из всех тех ребер, которые не принадлежат H, и всех инцидентных им вершин.

4.2. Графы и бинарные отношения

Пусть на множестве $V = \{a, b, c, ..., z\}$ задано бинарное отношение R, т. е. определено множество U упорядоченных отношением R пар вершин.

Ясно, что любое такое отношение вместе с множеством V представляет некоторый граф $G = (V, U)$.

Обратное, вообще говоря, не верно. Неоднозначность определяется тем, что на графах кратность ребер может быть задана произвольно, в то время как на бинарном отношении кратность вводить не принято. В остальном связь между графами и бинарными отношениями оказывается столь тесной, что представляет интерес ее отдельное рассмотрение.

Пусть на множестве $V = \{a, b, c, ...\}$ заданы отношение R и граф $G = (V, U)$ так, что R определено на $V_R \subset V$ и порождает $U_R \subset U$, т. е. R выделяет часть графа $H \subset R$.

Если R рефлексивно, т. е. aRa $\forall a \in R$, то U_R представляет множество петель на каждой из вершин V_R.

Если R симметрично, т. е. $aRb \to bRa$ $\forall a \in R$, то каждому ребру H соответствует ребро противоположной направленности, что может быть эквивалентно неориентированному графу.

Если R транзитивно, то H вместе с любыми дугами $(a, b), (b, c) \in U_R$ содержит и их замыкание (a, c).

Напомним, что отношение R, удовлетворяющее свойствам рефлексивности, симметричности и транзитивности, является отношением эквивалентности. Следовательно, если для графа G на множестве V определено отношение эквивалентности R, то такой граф представляется прямой суммой полных графов — подграфов G, определенных на классах эквивалентностей. Так, на рис. 4.3 приведен граф G, представленный прямой суммой трех полных подграфов G_1, G_2 и G_3.

$$G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$$

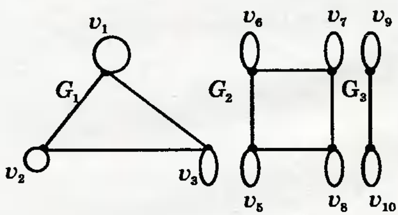


Рис. 4.3

Напомним, что отношение $a \geq b$, $a, b \in V$ называется частичным упорядочением, в смысле «равно или следует за», если оно обладает следующими свойствами:

- $a \geq a$;
- $a \geq b$ и $b \geq a \to a = b$;
- $a \geq b$ и $b \geq c \to a \geq c$.

Из этих свойств следует, что если на множестве вершин графа G определено частичное упорядочение, то граф G имеет петли, любые его две вершины соединены дугой, а для каждой пары дуг, инцидентных одной и той же вершине, определена замыкающая их транзитивная дуга. Пример такого графа приведен на рис. 4.4.

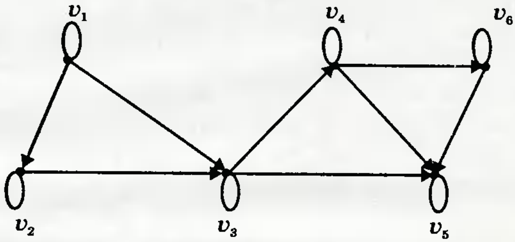


Рис. 4.4

Если потребовать, чтобы отношение $a > b$ имело строгую частичную упорядоченность, то $a = b$ не имеет места и соответствующий граф представляется без петель.

Если множество V упорядочить линейно, то станет справедливо только одно из соотношений: $a \geq b$ или $b \geq a$. Соответствующий граф представлен на рис. 4.5.

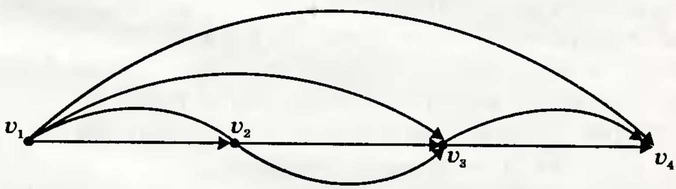


Рис. 4.5

Для любого отношения R существует обратное отношение R^{-1} такое, что $bR^{-1}a$ тогда и только тогда, когда aRb. Если $R = R^{-1}$, то такое отношение называется *симметрическим.*

Любое симметрическое отношение эквивалентно либо неориентированному графу, либо графу, в котором каждой дуге соответствует дуга противоположной направленности.

Нулевому отношению отвечает нуль-граф, универсальному отношению — полный граф.

4.3. Понятие изоморфизма и изоморфизм плоских графов

Один и тот же граф можно изображать по-разному.

Во-первых, в соответствии с описанием графа вершины допускается представлять точками, которые в пространственном отношении могут располагаться произвольно друг по отношению к другу, но так, чтобы разным вершинам отвечали бы и разные точки. Очевидно, что в этом случае, несмотря на то, что визуальное изображение графа может существенно измениться, оба изображения — исходное и измененное — должны соответствовать одному и тому же описанию графа.

Во-вторых, можно перенумеровать вершины уже изображенного графа и при этом потребовать не различать описаний, поскольку граф при этом фактически остался тем же.

В таких ситуациях необходимо четко определиться, какие графы считать одинаковыми, а какие — разными. С этой целью вводится понятие изоморфизма графов. Слово «изоморфизм» в переводе с греческого означает — одинаковой формы.

Графы $G(V,U)$ и $G'(V', U')$ называются *изоморфными*, если существует биекция между множествами вершин V и V', а также между множествами ребер U и U', сохраняющая отношение инцидентности: если $v \in V$, $v' \in V'$, $u \in U$ и $u' \in U'$, то вершина v' инцидентна ребру U' тогда и только тогда, когда вершина v инцидентна ребру U.

Графы, содержащие различное число вершин или ребер, не могут быть изоморфными.

Понятие изоморфизма позволяет упростить решение ряда задач. Поясним это на примере решения задачи *укладки* графов. Под укладкой графа понимают такое его изоморфное преобразование, при котором граф становится плоским.

Задача укладки имеет применение, например, при разработках информационных, транспортных, энергетических сетей и т. д.

Одной из первых задач укладки графов была следующая старинная шуточная задача. Три поссорившихся соседа имеют три общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому из колодцев?

Строгое доказательство невозможности получения положительного решения этой задачи принадлежит Жордану. Им была доказана следующая теорема, которая на первый взгляд кажется очевидной.

Теорема 4.1 (Жордан). Если L — непрерывная замкнутая кривая без самопересечений на плоскости, то L делит плоскость на внешнюю и внутреннюю области так, что любая непрерывная линия, соединяющая две точки x и y с внутренней и внешней областью, пересекает L.

Построим для задачи о трех соседях и трех колодцах граф, соответствующий взаимному расположению домов и колодцев. Этот граф изображен на рис. 4.6 слева. На рис. 4.6 справа изображен граф, изоморфный исходному. Из теоремы Жордана следует, что соединение вершин v_{d3} и v_{k2} ребром без пересечения с замкнутой кривой L не представляется возможным.

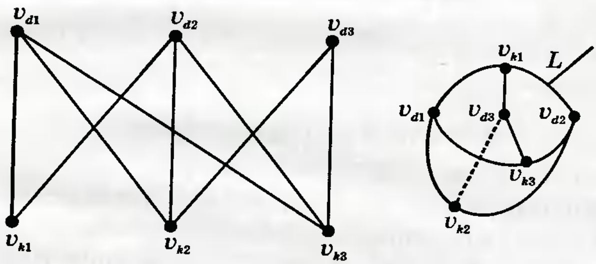


Рис. 4.6

Конечно, пытаясь получить любое другое решение задачи, можно перенумеровать вершины нашего графа, однако, поскольку перенумерация вершин любого графа с сохранением инцидентности этих вершин ребрам приводит к изоморфизму этих же графов, то и в общем случае имеем отрицательное решение задачи о трех колодцах и трех поссорившихся соседях.

Граф, изображенный на рис. 4.6 слева, получил специальное обозначение A_{33}.

Другой, замечательный в отношении планарности граф, представлен на рис. 4.7. Этот граф имеет обозначение U_{55}. Обозначение U обычно принимается для полных графов.

То, что граф U_{55} не плоский, доказывается точно так же, как и для графа A_{33}.

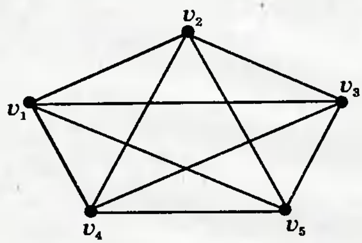


Рис. 4.7

В теории плоских графов один из фундаментальных результатов принадлежит Понтрягину и Куратовскому. Ими доказана следующая теорема.

Теорема 4.2 (Понтрягин и Куратовский). Для того чтобы граф G был плоским, необходимо и достаточно, чтобы он не содержал частичного графа, изоморфного A_{33} или U_5.

Доказательство этой теоремы ввиду его громоздкости мы опустим.

4.4. Степени вершин графа

Пусть G — неориентированный граф.

Степенью вершины v в графе G без петель называется число ребер $\rho(v)$, инцидентных этой вершине.

Теорема 4.3. Сумма степеней всех вершин графа без петель равна удвоенному числу m его ребер:

$$\Sigma_{i=1}^{n} \rho(v_i) = 2m. \tag{4.1}$$

Доказательство. Подсчет всех степеней вершин графа можно вести по вершинам. Количество ребер, инцидентных вершине v, равно $\rho(v)$. Но при этом каждое ребро считается дважды: в начальной и конечной вершинах. Следовательно, имеет место (4.1).

Теорема 4.4. Число вершин, имеющих нечетную степень, четно.

Доказательство. Обозначим Σ_1 и Σ_2 — количество всех вершин графа, имеющих нечетную и соответственно — четную степень. По теореме 1 $\Sigma_1 + \Sigma_2 = 2m$. Следовательно, $\Sigma_1 = 2m - \Sigma_2$. Правая часть этого соотношения четна. Поэтому четна и левая. Теорема доказана.

Граф G называется *однородным степени* r, если локальные степени всех его вершин равны r. Примерами таких графов являются правильные многогранники: куб, октаэдр и т. д.

Из формулы (4.1) следует, что в однородном графе степени r число ребер

$$m = nr / 2. \tag{4.2}$$

Рассмотрим теперь случай ориентированного графа G.

Обозначим через $\rho(v)$ и $\rho^*(v)$ числа ребер, выходящих из вершины v и соответственно входящих в вершину v. Эти числа называются *локальными степенями* вершины v.

Для числа ребер в G, аналогично (4.1), имеем

$$m = \Sigma^n_{i=1} \rho(v_i) = \Sigma^n_{i=1} \rho^*(v_i). \tag{4.3}$$

Ориентированный граф называется однородным степени n, если все его локальные степени имеют одно и то же значение

$$\rho(v) = \rho^*(v) = n \tag{4.4}$$

для любой вершины из G.

Для однородного ориентированного графа имеет место соотношение, аналогичное (4.2):

$$m = nr. \tag{4.5}$$

4.5. Представление графов матрицами

Матричные представления графов используются при решении прикладных задач, особенно в тех случаях, когда при моделировании предметной области применяются алгебраические доказательства.

Пусть имеем граф $G(V, U)$. Его *матрицей смежности* называется квадратная матрица (a_{ij}) порядка n^2, где n — число вершин, а a_{ij} — число ребер, инцидентных вершинам v_i и v_j. Если граф не имеет кратных ребер, то $a_{ij} = 1$, когда v_i и v_j смежные, и $a_{ij} = 0$, когда v_i и v_j не смежные. Если граф не имеет петель, то все его диагональные элементы равны нулю.

Рассмотрим примеры. На рис. 4.8 изображены три неориентированных графа.

В первом случае (рис. 4.8, *а*) имеем граф без петель и без кратных ребер. Во втором случае (рис. 4.8, *б*) имеем кратные ребра. В третьем случае (рис. 4.8, *в*) в вершинах

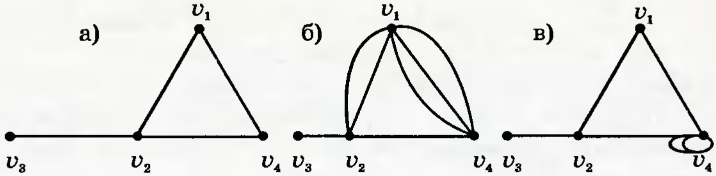


Рис. 4.8

v_1 и v_4 имеются петли. Соответствующие этим трем случаям матрицы смежности представлены ниже:

а) $\begin{pmatrix} 0&1&0&1\\ 1&0&1&1\\ 0&1&0&0\\ 1&1&0&0 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 0&2&0&3\\ 2&0&1&1\\ 0&1&0&0\\ 3&1&0&0 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 0&1&0&1\\ 1&0&1&1\\ 0&1&0&0\\ 1&1&0&2 \end{pmatrix}$

Для неориентированного графа матрица смежности является *симметрической*. Для ориентированного графа матрица смежности симметрической, вообще говоря, не является.

Матрицей инциденций неориентированного графа называется матрица (a_{ij}) размера $n \cdot m$, где n — число вершин, а m — число ребер, построенная по правилу

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i\text{-ая вершина инцидентна } j\text{-ому ребру,} \\ 0 \text{ — в противном случае.} \end{cases}$$

Соответствующие рис. 4.8 матрицы инциденций представлены ниже:

$$\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&0&0\\ 1&1&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&1&1&1&1&0 \end{pmatrix}.$$

Примечание.

Для графа на рис. 4.8 приняты следующие обозначения ребер:

$a_1 = (v_1,v_2)_1$, $a_2 = (v_1,v_2)_2$, $a_3 = (v_1,v_4)_1$, $a_4 = (v_1,v_4)_2$,
$a_5 = (v_1,v_4)_3$, $a_6 = (v_2,v_4)$, $a_7 = (v_1,v_2)$.

Матрица инциденций неориентированного графа обладает следующими очевидными свойствами:

- в графе без петель каждый столбец этой матрицы имеет в точности две единицы, соответствующие паре вершин ребра,

- если в графе имеются петли, то в столбцах, соответствующих петлям, имеется по одной единице, а в остальных — по две.

Матрицей инциденций ориентированного графа называется матрица (a_{ij}) размера $n \cdot m$, где n — число вершин, а m — число ребер, построенная по правилу

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i\text{-ая вершина начальная для } j\text{-ого ребра,} \\ -1, \text{ если } i\text{-ая вершина конечная для } j\text{-ого ребра,} \\ 0, \text{ в случае когда вершина и ребро не инцидентны.} \end{cases}$$

Рассмотрим, например, граф, изображенный на рис. 4.9.

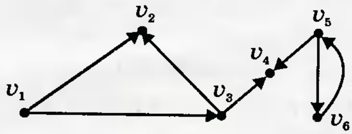


Рис. 4.9

Построенная в соответствии с описанным правилом матрица инциденций этого графа имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Примечание.

Для графа на рис. 4.9 приняты следующие обозначения дуг:

$a_1 = (v_1,v_2)$, $a_2 = (v_1,v_3)$, $a_3 = (v_3,v_2)$, $a_4 = (v_3,v_4)$,
$a_5 = (v_5,v_4)$, $a_6 = (v_5,v_6)$, $a_7 = (v_6,v_5)$.

Ориентированный граф, как правило, петель не содержит. Его матрица инциденций имеет в каждом столбце +1 и −1, которые отвечают началу и концу каждого ребра.

4.6. Представление графов списками инцидентности. Оценка пространственной сложности алгоритмов

Применение компьютерных технологий, связанных с решением задач на графах, породило новые способы представления графов. Это связано с тем, что матричное описание графов, будучи весьма привлекательным с точки зрения теоретических доказательств, приводит к неоправданно большому расходу оперативной памяти компьютера.

Под *пространственной характеристикой сложности алгоритма* понимают оценку $O(f(n_1, n_2, ..., n_k))$ требуемой памяти компьютера в зависимости от мощностей $n_1, n_2, ..., n_k$ множеств исходных данных при неограниченном увеличении этих мощностей.

По определению классического анализа $\varphi(n) = O(f(n))$ означает, что $|\varphi(n)| < Af(n)$ при $n \to \infty$ для любых положительных A, т. е. оценка $O(f(n_1, n_2, ..., n_k))$ является асимптотической.

При оценке пространственных затрат алгоритмов функцию $\varphi(n)$ обычно определяют как требуемое число ячеек памяти в зависимости от n. Для вычисления $f(n)$ имеем уравнение

$$\lim_{n \to \infty} \varphi(n) / f(n) = \text{const}.$$

В случае представления графов матрицами смежности видим, что $f(n) = n^2$, где n — число вершин графа и $\varphi(n) = O(n^2)$.

В случае представления графов матрицами инцидентности имеем $f(n_v, n_u) = n_v n_u$, где n_v, n_u — соответственно число вершин и число ребер графа и $\varphi(n_v, n_u) = O(n_v n_u)$.

Исследования показали, что пространственные затраты можно уменьшить, если изменить способ представления графов. В качестве альтернативы был предложен способ, именуемый представление графов *списками инцидентности*.

Такое представление в программировании базируется на понятиях *указателя, записи* и *списка*.

Пусть имеем некоторое множество переменных: A, B, C, ... Поставим каждой из этих переменных в однозначное соответствие некоторое целое число. Это число назовем указателем на переменную, например A, и обозначим @A в формулах либо A на графиках. Указатель на несуществующую переменную условимся обозначать специальным символом — nil.

Так, при размещении данных в памяти компьютера указатель представляет физический адрес ячейки памяти, где находится соответствующая переменная.

Под *записью* понимают поименованное упорядоченное множество переменных. Например, переменные $\langle x, y, z\rangle$ можно поименовать так: $A = \langle x, y, z\rangle$. При этом предполагается, что переменные x, y или z представляют любые математические объекты, например скаляры, векторы и т. д. Эти переменные называются *полями записи*. Для того чтобы адресоваться, скажем, к полю x записи A применяют обозначение: $A.x$.

Под *списком* понимают упорядоченную последовательность записей, в которой каждая предыдущая запись содержит в качестве одного из полей указатель на последующую запись. Кроме того, определен указатель на первую запись как на начало списка, а последняя в качестве поля указателя содержит nil. Таким образом, *список любого числа записей полностью определяется указателем на его начало.*

Списки инцидентности строятся следующим образом. Имеется общая *таблица начала*, в которой представлены указатели на начало списков каждой из вершин графа G. Каждая запись имеет минимум два поля. В одно из них помещается номер вершины, смежной с той, что приведена в таблице начала, а в другое — указатель на следующую запись. Каждая последующая запись имеет аналогичную структуру. Она представлена полем вершины, смежной с таблицей начала, и указателем на следующую запись. При этом, если вершина начала инцидентна кратным ребрам, то соответствующая смежная ей вершина должна повторяться в списке столько раз, какова кратность ребра. Таким же образом строятся все остальные списки для каждой из вершин таблицы начала.

Списки инцидентности на примере представления графа (рис. 4.9) приведены на рис. 4.10.

Из описанного построения видно, что каждый список инцидентности представляет множество ребер, инцидентных данной вершине графа. Множество всех списков, отвечающих каждой из вершин некоторого графа G, представляет данный граф.

В теоретико-множественной формулировке списки могут быть представлены упорядоченным семейством упорядоченных множеств. Например, граф, изображенный на рис. 4.9, представляется следующим семейством:

$\langle v_2, v_3\rangle, \langle\varnothing\rangle, \langle v_2, v_4\rangle, \langle\varnothing\rangle, \langle v_6\rangle, \langle v_5\rangle\rangle.$

В данном семействе порядковый номер списка соответствует номеру вершины графа, а элементы каждого из списков определяют множество ребер, инцидентных данной вершине.

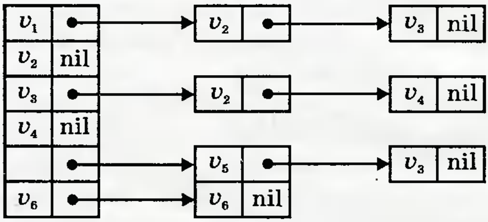


Рис. 4.10

Такой способ представления графов обладает тем преимуществом, что общее количество числа необходимых для этого ячеек памяти определяется всего лишь как $O(n+m)$. Кроме того, структура мобильна в отношении к преобразованиям графа, связанных с добавлением или уменьшением числа его ребер: ребро просто включается в список либо удаляется из списка.

Отметим, что в различных языках программирования имеются эффективные средства организации и обработки списков.

4.7. Маршруты, цепи, циклы и связность

Пусть G — конечный граф. *Маршрутом* S в G называется последовательность ребер,

$$S = (u_1, u_2, ..., u_n), \tag{4.6}$$

в которой любые соседние два ребра u_{i-1}, u_i, ($i = 2, n$) имеют общую вершину.

На графах допускаются маршруты, в которых не принимаются во внимание направления ребер. Такие маршруты называются *неориентированными*.

Пусть на графе определен маршрут (4.6). Та вершина ребра u_1, которая не является общей с вершиной ребра u_2, называется *начальной вершиной маршрута* S.

Аналогично вводится понятие конечной вершины маршрута: та вершина ребра u_n, которая не является общей с вершиной u_{n-1}, называется *конечной вершиной маршрута* S.

Остальные вершины маршрута S называются *внутренними.*

Нуль-маршрутом называется маршрут, не содержащий ребер.

Вершина u_j называется *достижимой* из вершины u_i, если существует маршрут из u_i в u_j. Для определенности считают, что любая вершина u_i достижима из себя нуль-маршрутом независимо от наличия петель.

Неориентированный граф называется *связным*, если все его вершины попарно достижимы.

Неориентированный граф называется *соотнесенным*, если он получен из ориентированного либо смешанного графа заменой всех дуг на неориентированные ребра.

Ориентированный либо смешанный граф называется *связным*, если связан соответствующий ему соотнесенный граф.

Ясно, что отношение достижимости, построенное на ребрах графа, является отношением эквивалентности и разбивает любой граф на классы связных подграфов.

Маршрут называется *цепью*, если все его ребра различны, и — *простой цепью*, если все его вершины различны.

Цепь называется *циклом*, если начальная и конечная вершины цепи равны. Другое определение цикла — *замкнутая цепь*, которое понимается в первоначальном определении. Цикл называется *простым*, если все его вершины различны.

Началом (концом) цикла можно считать любую из его вершин.

На ориентированном графе аналогично понятию цепи вводится понятие *пути*, а аналогично понятию цикла — понятие *контура*.

Путь — это ориентированная цепь. *Контур* — это замкнутый путь. Рассмотрим примеры различных маршрутов на графе G (рис. 4.11).

Маршрут (u_4, u_1, u_2) является простой цепью.

Маршрут $(u_4, u_1, u_2, u_3, u_7, u_1)$ цепью не является, поскольку ребро u_1 встречается в нем дважды. Маршрут (u_4, u_3, u_2, u_1) представляет цепь, но не простую, поскольку вершина v_3 встречается на ней дважды: как начало ребра u_1 и как конец ребра u_3. Такая цепь содержит в себе цикл. В данном случае в цепи (u_4, u_3, u_2, u_1) имеем цикл

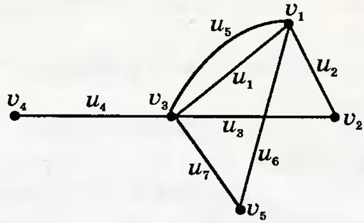


Рис. 4.11

(u_3, u_2, u_1). Этот цикл простой. Примером не простого цикла может служить маршрут $(u_1, u_2, u_3, u_7, u_6, u_5)$.

Существенный интерес в теории графов, а также для приложений представляют маршруты, которые образуют эйлеровы и гамильтоновы циклы и цепи. Такие маршруты рассматриваются нами ниже.

4.7. Эйлеровы циклы и цепи

Считают, что начало теории графов положила задача, предложенная Эйлером. *В каких случаях конечный граф можно определить циклом без дополнений?* Если граф G представим таким циклом, то он называется эйлеровым графом.

Теорема 4.5. Конечный граф G является эйлеровым графом тогда и только тогда, когда он связан и все степени его вершин четны.

Доказательство. Условие связности, очевидно, необходимо. Условие четности степеней вершин также необходимо, поскольку цикл, выйдя по одному ребру, должен возвратиться по другому.

Докажем достаточность. Предположим, что необходимые условия выполнены. Начнем строить цепь из произвольной вершины $a = v_0$ и будем продолжать ее, переходя от v_0 к v_1, от v_1 к v_2 и так далее, последовательно отмечая пройденные ребра. Очевидно, список вершин, начавшись на v_0, должен на v_0 и закончиться за конечное число шагов. В противном случае приходим к противоречию о связности графа либо, допуская связность, к противоречию о четности степеней всех его вершин.

Если при построении цепи все ребра графа G оказались отмеченными, то эйлеров цикл построен и этот цикл является эйлеровым графом G. В противном случае на G будут не отмечены некоторые ребра. В силу связности графа G неотмеченные ребра составят связный подграф G'. Все степени вершин этого подграфа четны. Это обусловлено тем, что все вершины как исходного графа, так и построенного цикла имеют четные степени. На графе G' найдется хотя бы одно из неотмеченных ребер, которое инцидентно одной из вершин построенной цепи. Это обусловлено связностью графа G. Обозначим эту вершину b. Повторяя процесс построения цикла из вершины b на подграфе G', снова возвращаемся в эту же вершину за конечное число шагов.

Обозначим: $P(v_i,v_j)$ — некоторая цепь из v_i в v_j. Очевидно, объединяя цепи так, что $P(a, b) \cup P(b, b) \cup P(b, a)$, мы имеем цикл $P'(a, a)$, который мощнее по множеству входящих в него ребер, чем $P(a, a)$.

Если цикл $P'(a, a) \neq G$, то повторим процесс увеличения мощности цикла $P'(a, a)$, включив в него новые ребра, аналогично ранее выполненному процессу. Тогда за конечное число шагов k имеем $P^k(a, a) = G$, что и требовалось доказать.

Ясно, что доказанная теорема определяет также и алгоритм построения эйлерового цикла на графе.

Эйлеровой цепью называется цепь, проходящая через каждое ребро графа в точности один раз.

Говорят, что множество цепей $P_1, P_2,..., P_n$ *покрывает* граф G, если $G = P_1 \cup P_2 \cup ... \cup P_n$ и $P_1 \cap P_2 \cap ... \cap P_n = \varnothing$.

Теорема 4.6. Пусть G — связный граф с k вершинами нечетной степени. Тогда минимальное покрытие графа цепями имеет мощность $k / 2$.

Доказательство. Согласно теореме 4.4 число вершин нечетной степени четно. Следовательно, каждая из k вершин нечетной степени должна быть концом одной из покрывающих цепей графа. Отсюда с необходимостью следует, что число всех покрывающих цепей должно быть не менее, чем $k / 2$. Расширим граф G до эйлерова графа, добавив $k / 2$ ребер, соединяющих различные пары вершин нечетной степени. Тогда на графе определен единственный эйлеров цикл. Аннулируя ребра, вместе с каждым аннулированным ребром имеем и новую цепь. Тогда число $k / 2$ является также и достаточным числом цепей, покрывающих граф.

Для ориентированных графов можно получить аналогичный результат. В частности, имеет место

Теорема 4.7. Для того чтобы на ориентированном графе G существовал контур, содержащий все дуги G, необходимо и достаточно, чтобы число всех входящих и выходящих дуг было одинаковым в каждой из вершин.

Такой контур называется *эйлеровым контуром.*

4.9. Гамильтоновы циклы. Оценка временной сложности алгоритмов

Цикл на графе G называется *гамильтоновым*, если соответствующая ему последовательность ребер содержит каждую вершину графа G в точности один раз.

Аналогично вводится понятие *гамильтонова контура* на ориентированном графе.

Примеры гамильтонового цикла и графа, для которого такого цикла не существует, представлены на рис. 4.12.

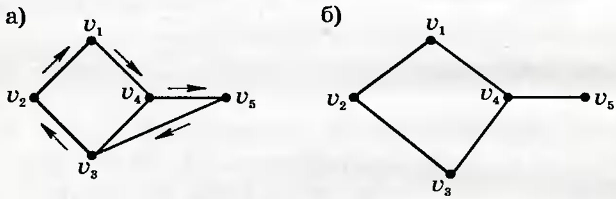


Рис. 4.12

На рис. 4.12, направление одного из гамильтоновых циклов отмечено стрелками. Соответствующий гамильтонов цикл представлен последовательностью ребер $\{(v_1, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_3), (v_3, v_2), (v_2, v_1)\}$. Можно заметить, что ребро (v_4, v_3) в этом цикле не используется. Этот факт указывает на то, что в гамильтоновом цикле могут участвовать не все ребра графа. Существенным в цикле данного типа является наличие всех вершин графа. В связи с этим в случаях, когда нет кратных ребер, гамильтонов цикл записывают последовательностью вершин. Так, в рассмотренном примере гамильтонов цикл можно представить следующей последовательностью вершин: $\{v_1, v_4, v_5, v_3, v_2\}$. Нетрудно заметить, что при такой записи каждый гамильтонов цикл должен соответствовать некоторой допустимой перестановке всех вершин графа. Ясно, что одному и тому же графу можно поставить в соответствие некоторое множество гамильтоновых циклов. Пример на рис. 4.12 иллюстрирует случай, когда это множество пусто, поскольку вершина v_4 необходимо должна быть повторена дважды.

Укажем некоторые задачи, интерпретация которых состоит в необходимости построения гамильтоновых циклов.

Задача о шахматном коне. Можно ли, начиная с произвольного поля на шахматной доске, ходить конем в такой последовательности, чтобы пройти через все поля и вернуться в исходное?

Задача о званом обеде. Обед накрыт на круглом столе. Среди приглашенных некоторые являются друзьями. При каких условиях можно рассадить всех так, чтобы по обе стороны каждого из присутствующих сидели его друзья?

Задача о коммивояжере. Коммивояжер должен объездить все n городов. Для того чтобы сократить свои расходы, он хочет построить такой маршрут, чтобы объездить все города точно по одному разу и вернуться в исходный с минимумом затрат.

В настоящее время не получено необходимых и достаточных условий существования для гамильтоновых циклов.

С другой стороны, существует очевидный алгоритм, который, казалось бы, можно применить к решению любой задачи о гамильтоновом цикле: генерируем все перестановки вершин и проверяем, какая из них является гамильтоновым циклом. Всех перестановок, очевидно, будет $n!$.

Оценим *временную сложность* этого алгоритма. Под временной характеристикой сложности алгоритма понимают асимптотическую оценку $O(f(n_1, n_2, ...n_k))$ требуемого времени работы компьютера в зависимости от мощностей $n_1, n_2, ..., n_k$ множеств исходных данных при неограниченном увеличении этих мощностей. Поскольку компьютеры могут обладать различной производительностью, то оценка временных затрат может быть выражена в количестве элементарных операций: сложений, умножений или других операций, выполняемых компьютером и принятых за основу.

Легко видеть, что ограничением применения предложенного выше метода является то, что для его реализации потребуется $O(nn!)$ вычислительных операций (n операций на каждую из $n!$ перестановок). Так, если $n = 20$ и каждый элементарный шаг компьютера выполняется за 10^{-7} с, то решение задачи о построении гамильтонова цикла займет порядка $20 \cdot 20! \approx 48 \cdot 10^{18}$ операций или $45 \cdot 10^{11}$ с, что составляет порядка 1500 веков.

Проблема существования гамильтонового цикла принадлежит к классу так называемых *NP-полных задач*. Это широкий класс задач, для которых не известен алгоритм *полиномиальной сложности* их решения, т. е. алгоритм с числом шагов, ограниченных полиномом от размерности задачи. Задача же построения гамильтонового цикла, как указано выше, в максимальном случае решается алгоритмом факториальной сложности.

Чтобы убедиться в том, что $n!$ растет быстрее, чем произвольный многочлен, покажем, что он растет быстрее, чем показательная функция, начиная с некоторого достаточно большого значения n.

Для этого рассмотрим варианту

$$x_n = c^n / n!,\ c > 1.$$

Нетрудно заметить, что

$$x_{n+1} = x_n \cdot c / (n + 1).$$

Поэтому, как только $n + 1 > c$, эта варианта становится убывающей, а поскольку она ограничена нулем, то предел ее также есть нуль.

Для решения NP-полных задач известен метод, позволяющий сократить число шагов, сводя задачу от факториальной к экспоненциальной сложности. Этот метод известен под названием «backtracing» или «алгоритм с возвратами». Его суть в применении к задаче построения гамильтоновых циклов состоит в следующем.

Будем искать решение в виде последовательности вершин $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, начиная от корневой вершины v_1. Имея частичное решение $\{v_1, v_2, \ldots, v_i\}$, $i < n$, пытаемся найти такое допустимое значение v_{i+1}, относительно которого можно предположить, что оно может расширить частичное решение до $\{v_1, v_2, \ldots, v_{i+1}\}$. Если такое предположение возможно, то v_{i+1} включается в частичное решение и процесс продолжается. Если никакая вершина не может претендовать на v_{i+1}, то следует возврат на шаг к v_{i-1}, а v_i из данного частичного решения исключается. Процесс поиска нового допустимого значения продолжается, начиная с v_{i-1}. Когда v_n найдено, отмечают $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ как решение.

Если поставлена задача отыскания всех решений, то попытка получения каждого нового решения осуществляется возвратом на шаг от v_n в предположении, что решение как бы получено не было. Таким образом, отыскивается множество всех решений, которое, в частности, оказывается пустым, если гамильтонова цикла на графе не существует.

Из описания алгоритма с возвратами видно, что задача построения всех гамильтоновых циклов на графе G может быть решена путем сопоставления исходному графу некоторого другого графа G', построенного из частично пересекающихся цепей $\{v_1, v_2, ..., v_i\}$, $(i \le n)$. Подмножество G', состоящее из цепей $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, таких что v_n смежна с v_1 на G, представляет множество решений задачи. Граф G' называется *соотнесенным* графом.

Рассмотрим решение задачи о коммивояжере на примере графа G (рис. 4.13). Имеем пять пунктов $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Стоимость доставки информации из пункта i в пункт j показана числами над ребрами графа. Требуется, используя компьютерную сеть, моделируемую данным графом, обеспечить перекличку пунктов (например, фирм, принадлежащих одной корпорации и т. д.), начиная с пункта 1. Для решения поставленной задачи построим гамильтонов цикл минимальной стоимости передачи информации либо несколько таких циклов в случае их одинаковой стоимости.

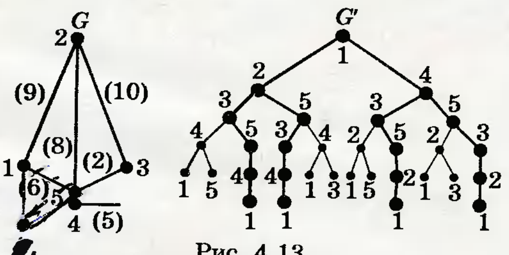


Рис. 4.13

Задачу будем решать в два этапа. Вначале построим все гамильтоновы циклы из пункта 1. Для этого применим алгоритм с возвратами. Затем на множестве полученных циклов выберем циклы минимальной длины.

Построение цепей графа G' применением алгоритма с возвратами приведено на рис. 4.13 справа, где цепи, соответствующие гамильтоновым циклам, выделены жирными линиями.

Всего имеем четыре гамильтоновых цикла:

a) {1, 2, 3, 5, 4, 1},

b) {1, 2, 5, 3, 4, 1},

c) {1, 4, 3, 5, 2, 1},

d) {1, 4, 5, 3, 2, 1}.

Стоимости передачи информации каждым из этих циклов вычисляются ниже:

a) 9+10+2+2+6 = 29,

b) 9+8+2+5+6 = 30,

c) 6+5+2+8+9 = 30,

d) 6+2+2+10+9 = 29.

Решению поставленной задачи отвечают гамильтоновы циклы a) и d).

Можно показать, что алгоритмы с возвратами имеют вычислительную сложность $O(c^n)$, где $c > 1$ — константа, определяемая свойствами присоединенного графа. Такое быстродействие при больших n значительно выше, чем в случае применения алгоритмов факториальной сложности. Например, возвращаясь к рассмотренному выше примеру оценки быстродействия алгоритма с возвратами при $n = 20$, видим, что в случае когда $c = 2$ (граф G' двоичное дерево), имеем всего 2^{20} или порядка 10^6 вычислительных операций. На любом современном компьютере это практически не займет времени. Однако, при увеличении размерности задачи всего лишь в несколько раз снова возникают проблемы реального времени. Это способствует развитию новых идей построения гамильтоновых циклов.

4.10. Деревья

Связный неориентированный граф называется *деревом*, если он не имеет циклов. Это определение исключает наличие на дереве петель и кратных ребер. Прямая сумма несвязных деревьев, рассматриваемая в целом как граф, называется *лесом*.

В произвольном графе G вершина a называется *концевой*, если $\rho(a) = 1$. Инцидентное ей ребро называется *концевым ребром*.

Теорема 4.8. Любое конечное дерево имеет хотя бы две концевые вершины и хотя бы одно концевое ребро.

Доказательство. Пусть v_a — некоторая вершина дерева. Будем обходить дерево, начиная с этой вершины, так, что, войдя в вершину по одному ребру, выходим из нее по другому. Поскольку дерево не содержит циклов, ни одна из пройденных вершин не будет повторена. В связи с тем, что дерево конечно, процесс должен закончиться в некоторой вершине v_b. Эта вершина концевая и ей инцидентно только одно ребро, по которому в нее вошли. Если v_a также концевая вершина, то имеем две концевые вершины и не менее одного концевого ребра.

Если же v_a не является концевой вершиной, то построим вторую цепь из v_a. По этой цепи придем к некоторой концевой вершине v_c. Вершины v_b и v_c различны, так как граф не содержит циклов. То, что цепь, построенная из v_b в v_c, содержит не менее одного ребра, теперь очевидно.

Теорема 4.9. Дерево с n вершинами содержит $n - 1$ ребро.

Доказательство проведем индукцией по n. При $n = 2$ утверждение очевидно. Пусть дерево G содержит n вершин. Удалим из него какую-нибудь концевую вершину и инцидентное ей концевое ребро. Получим новое дерево, содержащее $n - 1$ вершину и, по предположению индукции, $n - 2$ ребра. Следовательно, исходное дерево содержит $(n - 2) + 1 = n - 1$ ребро.

Теорема 4.10. В дереве G любые две вершины v_a начала и v_b конца какого-либо маршрута определяют цепь и притом единственную.

Доказательство. Предположим, что на дереве G имеются два маршрута, связывающих v_a и v_b. Тогда имеем цикл и G не является деревом. Это противоречие доказывает теорему.

Теорема 4.11. На n вершинах можно построить n^{n-2} различных дерева.

Доказательство. Пусть V — множество вершин мощности n. Обозначим элементы множества V числами

$$1,\ 2,\ \ldots,\ n \tag{4.7}$$

и построим какое-либо дерево G на V. Для этого дерева введем символ, характеризующий его однозначно.

Согласно теореме 4.8 в G существуют концевые вершины. Обозначим через b_1 первую концевую вершину в последовательности (4.7), а через (a_1, b_1) — соответствующее концевое ребро. Удалив из G это ребро вместе с вершиной b_1, мы получим новое дерево G_1. Для этого дерева снова найдется в (4.7) первая концевая вершина b_2 с ребром (a_2, b_2). Будем повторять такой процесс до тех пор, пока не останется единственное ребро (a_{n-1}, b_{n-1}), соединяющее две оставшиеся вершины. Тогда символ

$$\sigma(G) = [a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}] \tag{4.8}$$

однозначно определяется деревом G.

Обратно, каждый символ $\sigma(G)$ определяет дерево G с помощью обратного построения. Если дано (4.8), то находим первую вершину b_1 в (4.7), которая не содержится в (4.8). Далее удаляем вершину a_1 из (4.8) и b_1 из (4.7) и продолжаем построение для всех оставшихся чисел из (4.8).

В (4.8) каждая вершина может принимать все возможные значения из (4.7). Следовательно, имеем задачу размещения из $n-2$ по n, что и определяет n^{n-2} различных деревьев.

Теорема 4.11 представляет интерес в связи с постановкой следующей задачи.

Задача о минимальном соединении. Пусть для некоторого множества V населенных пунктов известна стоимость $\mu(v_i, v_j)$ $(i, j \le n)$ сооружения средств информационной сети между любыми двумя городами $v_i, v_j \in V$. Как должна быть спроектирована сеть, чтобы она обеспечивала связь между всеми городами, а ее общая стоимость была минимальна? Аналогичные вопросы возникают при проектировании дорог, трубопроводов и т. д. Такие задачи называются задачами о минимальном соединении.

В терминах теории графов эта задача формулируется следующим образом. Построим полный граф G, содержащий все вершины множества V. Каждому ребру E графа G припишем *меру* $\mu(E)$. Под мерой $\mu(E)$ на графе понимают вещественную неотрицательную функцию, для которой должно быть выполнено

$$\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2),$$

где E_1 и E_2 — любые непересекающиеся множества.

Задача о минимальном соединении состоит в построении части графа $G^* \subset G$, содержащего все вершины G, и такого, чтобы мера $\mu = \Sigma_{E \in G^*} \mu(E)$ была минимальной.

Ясно, что G^* есть дерево. Предположив далее наличие цикла в G^*, мы имеем возможность уменьшить μ, удалив ребро.

По теореме 4.11 решение этой задачи полным перебором потребует построения n^{n-2} деревьев. Можно значительно уменьшить число вариантов, если воспользоваться простым алгоритмом, который предложил Борувка. Этот алгоритм состоит в следующем.

Вначале находим ребро E_1 с минимальной мерой $\mu(E_1)$. Обозначим соответствующую ему часть дерева $G_1{}^*$. На каждом последующем шаге строим часть G_i^* при помощи добавления к G_{i-1}^* такого ребра E_i, что оно имеет минимальную меру $\mu(E_i)$, а граф G_{i-1}^* не имеет циклов. Если имеется несколько ребер одинаковой длины, то можно выбрать любое из них. Ясно, что граф G_{n-1}^* есть остовное дерево. То, что он имеет минимальную меру μ, доказано в [5].

4.11. Раскраска вершин и теорема Шеннона об информационной емкости графа

Пусть дан граф G. Этот граф называется *k-раскрашиваемым,* если существует такое разбиение множества его вершин на k классов

$$C_1, C_2, \ldots, C_n, \tag{4.9}$$

что все ребра в G соединяют вершины только из разных классов. Само такое разбиение называется *k-раскраской.* При раскраске каждое ребро имеет две вершины необходимо разного цвета, а все вершины, относящиеся к одному и тому же классу, окрашены в один и тот же цвет.

Наименьшее число k классов раскраски называется *хроматическим числом* графа G. Если число способов раскраски графа равно хроматическому числу, то граф именуют *k-хроматическим*, а классы (4.9) — хроматическим разложением G.

Теорема 4.12. Пусть G — связный неориентированный граф. Для того чтобы граф был бихроматическим, необходимо и достаточно, чтобы он не имел циклов нечетной длины.

Необходимость. Предположим, что граф G — бихроматический и имеет хотя бы один цикл нечетной длины.

Обходя этот цикл, мы будем иметь чередующиеся цвета смежных вершин. Поскольку число вершин в цикле нечетно, то, дойдя до вершины, с которой начали обход цикла, получим, что она должна иметь цвет противоположной раскраски. Приходим к противоречию.

Достаточность. Произвольный граф G может быть раскрашен бихроматически следующим образом. Зафиксируем произвольную вершину V и раскрасим ее в один из двух различных цветов. Все смежные с ней вершины раскрасим в противоположный цвет и так далее, пока не раскрасим весь граф. Предположим, что при такой раскраске некоторая вершина V^* оказалась раскрашена в два различных цвета. Тогда из V в V^* существует две цепи: одна четной, а другая — нечетной длины. Эти две цепи образуют цикл нечетной длины. Приходим к противоречию, что и доказывает теорему.

В [5] показано, что если максимальная степень вершин графа G равна r, то граф G представляется r-раскрашиваемым, за исключением двух случаев:

при $r = 2$ граф G имеет компоненту связности, являющуюся циклом нечетной длины,

при $r > 2$ полный граф с $r + 1$ вершинами является компонентой связности графа G.

Пусть G — граф без петель и кратных ребер. Подмножество вершин $S \subseteq G$ называется внутренне устойчивым, если никакие вершины $v_1, v_2 \in S$ несмежные. Пусть A — семейство всех таких подмножеств. Числом внутренней устойчивости графа G называется величина

$$\alpha((G) = \max_{S \in A} |S|.$$

Теорема 4.13. Хроматическое число $k(G)$ и число внутренней устойчивости $\alpha((G)$ связаны неравенством

$$|V| \le \alpha((G)k(G)$$

для $G = (V, E)$.

Доказательство. Правильно раскрасим вершины графа G в $k(G)$ цветов. Тогда каждое множество вершин V_i, окрашенных в один и тот же цвет, внутренне устойчиво и, следовательно, $|V_i| \le \alpha((G)$ и $|V| = \Sigma_i |V_i| \le \alpha((G)k(G)$.

Отображение ϕ множества V в себя называется *сохранным*, если для любой пары несмежных вершин v_1 и v_2 вершины $\phi(v_1)$ и $\phi(v_2)$ также несмежные и различны. Ясно, что сохранное отображение переводит всякое внутренне устойчивое множество во внутренне устойчивое.

Определим произведение графов $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ следующим образом. Под произведением $G_1 \times G_2$, будем понимать граф, множеством вершин которого является декартово произведение $V_1 \times V_2$, а вершины (v_1, v_2), $(v_1', v_2') \in$ $\in V_1 \times V_2$ смежные, если

- v_1 смежная с v_1' в G_1 и v_2 смежная с v_2' в G_2 либо
- v_1 смежная с v_1', $v_2 = v_2'$ либо
- $v_1 = v_1'$, а v_2 смежная с v_2'.

Теорема 4.14 (Шеннон). Для любых двух графов $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ имеем

$$\alpha((G_1)\alpha((G_2) \le \alpha((G_1 \times G_2),$$

но если для графа G_1 существует сохранное отображение ϕ, такое, что множество $\phi(V_1)$ внутренне устойчиво, то

$$\alpha((G_1)\alpha((G_2) = \alpha((G_1 \times G_2).$$

Доказательство. Если S_1 и S_2 наибольшие внутренне устойчивые множества для G_1 и G_2 то $S_1 \times S_2$ — внутренне устойчиво и $\alpha((G_1 \times G_2) \ge |S_1 \times S_2| = |S_1||S_2| = \alpha((G_1)\alpha((G_2)$.

Пусть теперь ϕ-сохранное отображение для графа G и множество $\phi(V_1)$ внутренне устойчиво. Для произвольных $v' \in V_1$ и $v'' \in V_2$ обозначим $f(v', v'') = (\phi(v'), v'')$. Пусть S_0 — наибольшее внутренне устойчивое множество графа $G_1 \times G_2$. Непосредственно проверяется, что $f(S_0)$ также внутренне устойчиво и $|(S_0)| = |S_0|$. Распределим элементы из $f(S_0)$ по k классам в зависимости от элемента v' в паре (v', v''). Каждый класс содержит не более, чем $\alpha((G_2)$ элементов. Следовательно, $\alpha((G_1 \times G_2) = |f(S_0)| \le k\alpha((G_2) \le \alpha((G_1)\alpha((G_2)$. Отсюда и вытекает доказываемое равенство.

Рассмотрим пример применения теоремы Шеннона к задаче об информационной емкости множества информационных сообщений.

Пусть по информационному каналу передается пять сообщений: v_1, v_2, v_3, v_4, v_5. При приеме сообщение v_1 может быть истолковано как v_1 или v_2, соответственно сообщение v_2 как v_2 или v_3 и так далее, наконец, v_5 — как v_5 или v_1. Какое наибольшее количество сообщений можно принять, не спутав друг с другом?

Задача сводится к нахождению наибольшего внутренне устойчивого множества S графа, изображенного на рис. 4.14.

Очевидно, что здесь $\alpha((G) = 2$, и можно считать, что $S = (v_1, v_3)$ или $S = (v_1, v_4)$ или $S = (v_3, v_5)$ и т. д.

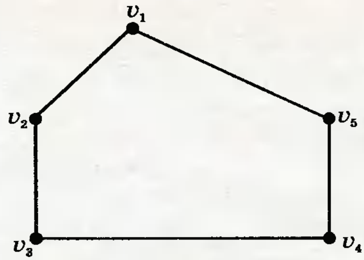


Рис. 4.14

Предположим, что мы будем использовать сообщения, определенные на $G \times G$. Тогда $\alpha((G) = (\alpha((G_2))^2 = 4$. В частности, сообщения v_1v_1, v_1v_3, v_3v_1, v_3v_3 нельзя спутать.

Информационной емкостью графа G называют число $\Theta(G) = \sup^n \alpha((G^n)$. Так как $\alpha((G^n) \leq |V^n| = |V|^n$, то $\Theta(G) = |V|$.

Отсюда и из теоремы 4.12 следует, что если для графа $G = (V, E)$ существует сохранное отображение ϕ, такое, что множество $\phi(V)$ внутренне устойчиво, то для такого графа $\Theta(G) = \alpha((G)$.

4.12. Раскраска ребер графа и теоремы о хроматическом классе

Пусть дан связный неориентированный граф G. Раскрасим его ребра в какой-либо цвет. Раскраска называется *правильной*, если никакие два ребра, инцидентных данной вершине, не окрашены в один и тот же цвет.

Наименьшее число q цветов, достаточных для правильной раскраски графа, называется *хроматическим классом.* Пусть $\rho_{\max}$ — наибольшая из степеней вершин графа. Тогда, очевидно, $\rho_{\max} < q$.

В задачах, связанных с применением информационных технологий, вершины графа G можно интерпретировать как некоторые узлы — информационные центры, способные принимать и передавать информацию по каналам — ребрам графа G. Каждый такой канал должен иметь уникальный адрес на множестве всех адресов данного узла. В качестве такого адреса можно принять цвет, отвечающий правильной раскраске графа G. Возникает вопрос: какова должна быть минимальная мощность множества всех адресов информационных каналов для того, чтобы обеспечить возможность однозначной адресации между всеми информационными центрами? Ясно, что множество всех таких адресов составляет хроматический класс графа G.

Для хроматических графов Шенноном доказана следующая теорема, которую мы приводим без доказательств.

Теорема 4.15 (Шеннон). Хроматический класс графа не превосходит $\lfloor 3\rho_{max} / 2 \rfloor$, где символами $\lfloor a \rfloor$ обозначено наименьшее целое, не превосходящее вещественное a.

Приведем пример, когда эта оценка не улучшаема. Действительно, если множество вершин графа состоит из трех точек a, b и c, а степени вершин равны соответственно $\rho(a) = \rho(b) = k$ и $\rho(c) = 2\lfloor k / 2 \rfloor$, то для правильной его раскраски потребуется точно $\lfloor 3k / 2 \rfloor$ цветов. Например, если $\rho(a) = \rho(b) = 3$, а $\rho(c) = 2\lfloor k / 2 \rfloor = 2$, то для правильной раскраски этого графа потребуется четыре цвета.

Оценка, полученная Шенноном, может быть улучшена для некоторых частного вида графов. Некоторые такие графы рассмотрены В. Г. Визингом.

Теорема 4.16 (Визинг). Пусть R — наибольшее число ребер между смежными вершинами. Тогда

$$q \leq \rho_{max} + R.$$

Представляет интерес рассмотреть случай, когда $R = 1$.

Тогда равенство $q = \rho_{max} + 1$ достигается при четном $\rho_{max} \geq 2$ для полного графа $U_{\rho max+1}$. Пусть $\rho_{max} = 2m > 0$. В этом случае граф $U_{\rho max+1}$ имеет $2m + 1$ вершину и среди любых $m + 1$ его ребер хотя бы два имеют общую вершину. Поэтому окрасить одним цветом можно не более чем m его ребер. Поскольку всего он имеет $(2m + 1)m$ ребер, то должно выполняться неравенство

$$qm \text{ i } (2m + 1)m \text{ или } q \text{ i } (2m + 1) = \rho_{max} + 1.$$

По теореме же Визинга $q \leq \rho_{max} + 1$. Следовательно, имеет место точное равенство $q = \rho_{max} + 1$.

Задачи

Построить графы для решения задач **4.1 — 4.2.**

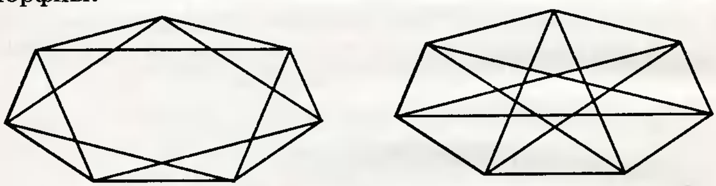
4.1. Перевозчику ($П$) нужно переправить через реку волка ($В$), козу ($К$) и мешок с капустой ($М$). Лодка так мала, что кроме перевозчика может взять только один из этих объектов. Кроме того, капусту нельзя оставлять вместе с козой, а козу — с волком. Как можно осуществить переправу?

4.2. Два человека имеют полный кувшин воды в 8 литров, а также два пустых кувшина в 5 и в 3 литра. Как они могут разделить воду поровну?

4.3. Пусть имеется множество V, состоящее из 3 документов. Построить граф для отношения $a \in A$, характеризующий принадлежность документа a множеству A, где A пробегает все подмножества множества V.

4.4. Пусть имеется множество T, состоящее из трех компьютерных сетей: $S1$, $S2$, $S3$. Известно, что компьютер $K1$ входит только в сеть $S1$, компьютер $K2$ — только в сеть $S2$, а компьютер $K3$ входит в две сети: $S1$ и $S2$. Построить граф, характеризующий принадлежность компьютера компьютерным сетям.

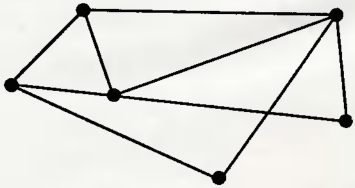
4.5. Показать, что два графа на данном рисунке изоморфны.



4.6. Потоки документов циркулируют между городами A_1, A_2, A_3 и городами B_1, B_2, B_3. Можно ли проложить непересекающиеся маршруты, соединяющие каждый город A_i с каждыми городом B_j?

4.7. Найти степени вершин для графов тетраэдра и куба.

4.8. Найти сумму степеней всех вершин для следующего графа:



4.9. Построить матрицы смежности и инцидентности для тетраэдра.

4.10. Являются ли эйлеровыми графами: прямоугольник с главной диагональю, куб?

4.11. Какова мощность минимального покрытия куба цепями?

4.12. На графе, который определен прямоугольником с непересекающимися диагоналями, построить покрытие графа цепями.

4.13. Решить задачу о званом обеде, когда число участников обеда равно 5: хозяин — мужчина. Остальные две пары (мужчина, женщина) — гости. Хозяин знаком со всеми приглашенными мужчинами. Обе женщины знакомы друг с другом.

4.14. Привести любое решение задачи шахматного коня.

4.15. Применив алгоритм с возвратами, построить все гамильтоновы циклы для графа, образованного квадратом с пересекающимися диагоналями.

4.16. Подсчитать, сколько каталогов можно построить в WINDOWS, если всего имеем 5 папок.

4.17. Для некоторой информационной сети, состоящей из 4 абонентских пунктов известны стоимости сооружения любого из ее участков (табл. 4.1).

Таблица 4.1

Стоимости сооружения пунктов информационной сети

Пункты	Стоимости (тыс. грн)			
	1	2	3	4
1	—	2	3	5
2	2	—	3	4
3	3	3	—	6
4	5	4	6	—

Используя алгоритм Борувки, спроектировать информационную сеть минимальной стоимости.

4.18. Граф представлен ромбом с диагональю. Является ли он бихроматическим?

4.19. Пусть все n городов имеют друг с другом по одному информационному каналу связи. Применив теорему Визинга, определить минимальное число адресов каналов.

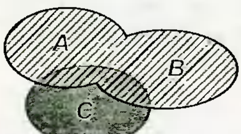
ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

1.1. $A - B = \{1\}$, $A \cap B = \{3, 5\}$, $M = (A - B) \cup (A \cap B) = \{1, 3, 5\}$; $A - B = \{2, 5\}$, $A \cap B = \{4\}$, $M = \{2, 4, 5\}$; $A - B = \{1\}$, $A \cap B = \varnothing$, $M = \{1\}$.

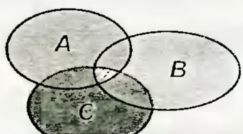
1.2. Из условия задачи видно, что множество A состоит из чисел, нацело делящихся на 4, а множество B — из чисел, нацело делящихся на 3. По условию множество M должно состоять из чисел, которые нацело делятся как на 3, так и на 4. Поскольку 3 и 4 взаимно просты, можно утверждать, что множество M состоит из чисел, нацело делящихся на их произведение. Таким образом, множество M состоит из чисел вида $12n$, т. е. из чисел, нацело делящихся на 12.

1.3. Выпишем все множества, являющиеся подмножествами универсального множества I. Поскольку пустое множество $\varnothing$ является подмножеством любого множества, то $M1 = \varnothing$ является подмножеством I. Так как множество I является подмножеством самого себя, то $M2 = I = \{a, b, c\}$ также входит в число подмножеств универсального множества. Выпишем остальные подмножества: $M3 = \{a\}$, $M4 = \{b\}$, $M5 = \{c\}$, $M6 = \{a, b\}$, $M7 = \{a, c\}$, $M8 = \{b, c\}$.

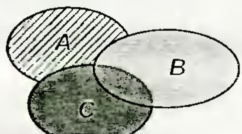
1.4. Ответами являются заштрихованные области плоскостей.



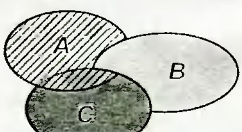
$M = A \cup B$



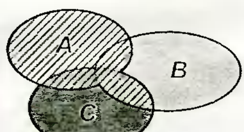
$M = A \cap B \cap C$



$M = (A - B) - C$



$M = A - (B - C)$



$M = A \cup (B \cap C)$

1.5. Обозначим через I универсум — множество всех выданных адресов. Пусть A — множество всех адресов, указывающих на страницы, содержащие информацию по техническим наукам, B — множество всех адресов страниц, со сведениями о периодических изданиях, C — множество адресов страниц, где приведена информация об изданиях Австралии. Тогда искомое множество X можно выразить через имеющиеся множества по формуле: $X = (A \cap B) \setminus C$, из которой получаем: $X = \{$**www.st1, www.st2**$\}$.

1.6. Введем следующие обозначения. I — универсальное множество всех ключевых слов. A, B и C — множества ключевых слов универсума, которые можно использовать для поиска информации соответственно о современных текстовых процессорах, современных средствах хранения документов и способах передачи электронных документов по каналам связи. Тогда искомое множество X ключевых слов можно выразить через множества A, B, C следующим образом: $X = A \setminus (B \cup C)$. Задача теперь состоит в том, чтобы для известных множеств A, B, С определить X.

1.7. Декартово произведение множеств A и B представляет собой множество всевозможных упорядоченных пар, в которых первые элементы принадлежат множеству A, а вторые — B. Следовательно, имеем следующее выражение

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}.$$

1.8. $D_r = \{5, 6, 7\}$, $D_l = \{1\}$.

1.9. Покажем, что данное отношение рефлексивно. Действительно, для любого $x \in A$ пара (x, x) входит в отношение R, так как в R включены пары (1, 1), (2, 2), (3, 3). Это отношение также симметрично, так как для любых x, y из A в отношение R пары (x, y) входят или не входят одновременно. Данное отношение является также транзитивным. Действительно, достаточно рассмотреть случаи, когда $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$. Во всех этих случаях пары (x, z) также принадлежат R. Например, $(1, 2) \in R$, $(2, 1) \in R$. В этом случае пара (1, 1) также принадлежит R. Так как данное отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно, то оно является отношением эквивалентности и индуцирует разбиение множества A на попарно непересекающиеся непустые классы эквивалентности: {1, 2}, {3}. В данном случае элемент 3 попал в отдельный класс, поскольку он не образовал ни одной пары с элементами 1 и 2.

1.10. Для ответа на вопрос задачи необходимо проверить, обладает ли данное отношение свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности. Это отношение, очевидно, рефлексивно, так как любое натуральное число, отличное от единицы, имеет хотя бы один делитель, отличный от единицы. Таким делителем является, например, само число. Данное отношение также симметрично, так как если числа x, y имеют общий делитель, отличный от единицы, то, очевидно, числа y, x имеют такой же общий делитель. Покажем, что свойство транзитивности в данном случае не выполняется. Рассмотрим числа $x = 6$, $y = 15$, $z = 5$. Числа x и y имеют общий делитель 3, отличный от единицы. Числа y и z имеют общий делитель 5, также отличный от единицы. Однако числа x и z не имеют ни одного общего делителя, отличного от единицы. Мы показали, что возможен случай, когда пары (x, y), (y, z) принадлежат данному отношению, а пара (x, z) не принадлежит этому отношению.

1.11. Рассмотрим отношение $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c)\}$, определенное на декартовом квадрате множества $A = \{a, b, c\}$. Это отношение, очевидно, рефлексивно. Покажем, что оно не является симметричным. Действительно, пара (a, b) принадлежит отношению, а пара (b, a) — нет. Покажем, что свойство транзитивности также не выполняется. Действительно, пары (a, b) и (b, c) принадлежат данному отношению, а пара (a, c) — нет.

1.12. Рассмотрим отношение $R = \{(a, b), (b, a)\}$, заданное на декартовом квадрате множества $A = \{a, b\}$. Это отношение, очевидно, симметрично. Свойство же рефлексивности не выполняется, так как, например, пара (a, a) не входит в отношение. Свойство транзитивности также не выполняется, так как пары (a, b) и (b, a) принадлежат отношению R, а пара (a, a) не принадлежит.

1.13. Рассмотрим отношение $R = \{(a, b), (b, c), (a, c)\}$, заданное на декартовом квадрате множества $A = \{a, b, c\}$. Это отношение транзитивно. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно проверить только один вариант. Пары (a, b) и (b, c) входят в отношение R. Для транзитивных отношений пара (a, c) также должна принадлежать R. В данном случае это так. Для данного отношения других вариантов, для которых $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$, нет. Данное отношение не является рефлексивным, так как пара (a, a) не принадлежит R. Свойство симметричности также не выполняется, так как пара (a, b) принадлежит R, а пара (b, a) — нет.

1.14. Отношение R на множестве слов русского языка определим следующим образом. Пара слов (a, b) принадлежит отношению R, если и только если эти слова имеют хотя бы одну общую букву. Например, пара слов («топор», «ведро») входит в отношение R, так как эти слова имеют общую букву «о», а пара («дом», «луг») не входит в R, так как эти слова не имеют общих букв. Очевидно, определенное таким образом отношение рефлексивно, так как любое слово имеет общие с самим собой буквы. Это отношение также симметрично, так как если слово a имеет общие буквы со словом b, то слово b имеет те же общие буквы со словом a. Рассмотрим слова «корова», «вагон», «нить». Первое и второе слова имеют общие буквы. То же можно сказать о втором и третьем словах. Однако первое и третье слова не имеют общих букв. Это говорит о том, что свойство транзитивности не выполняется.

1.15. Отношение R на множестве всех подмножеств множества $A = \{1, 2\}$ определим следующим образом. Пара подмножеств X и Y множества A входит в R, если и только если $X \subseteq Y$. Отношение R является рефлексивным, так как для любого множества X справедливо $X \subseteq X$. Это отношение также транзитивно, так как из $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq Z$ всегда следует $X \subseteq Z$. Свойство же симметричности не выполняется, так как, например, множество $\{1\}$ включено в A, а множество A не включено в множество $\{1\}$.

1.16. Рассмотрим отношение $R = \{(a, b), (b, a), (a, a)\}$ на декартовом квадрате множества $A = \{a, b\}$. Это отношение симметрично, так как пары вида (x, y) и (y, x) принадлежат или не принадлежат R одновременно. Для проверки транзитивности необходимо рассмотреть следующие варианты, где пары вида (x, y), (y, z) принадлежат отношению R. В случае $(a, b) \in R$, $(b, a) \in R$ очевидно выполнение транзитивности, так как $(a, a) \in R$. В случаях когда $(b, a) \in R$, и $(a, a) \in R$ очевидно выполнение транзитивности, так как имеем $(a, a) \in R$. Для варианта $(a, a) \in R$, $(a, b) \in R$ свойство транзитивности выполняется, так как $(a, b) \in R$. Свойство же рефлексивности не выполняется, так как пара (b, b) не принадлежит отношению.

1.17. Не является, так как элементу $1 \in A$ ставятся в соответствие различные элементы $a, b \in B$.

1.18. Функция $y = \lg x$ непрерывна и монотонна. Значению $x = 1$ соответствует значение $y = \lg 1 = 0$. Значению $x = 10$ соответствует $y = \lg 10 = 1$. Следовательно, образом отрезка $[1, 10]$ при данном отображении является отрезок $[0, 1]$.

1.19. Поскольку функция $y = \sin x$ принимает значения, не выходящие за границы промежутка $[-1, 1]$, для каждого a из этого промежутка уравнение $\sin x = a$ имеет решение, и для любого x существует значение $\sin x$, можно утверждать, что прообразом данного промежутка при отображении $y = \sin x$ является вся числовая ось.

1.20. Не является, так как существуют такие различные значения x_1 и x_2, что $f(x_1) = f(x_2)$. Например, пусть $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. Тогда $f(x_1) = 1^2 = (-1)^2 = f(x_2)$.

1.21. Поскольку каждому элементу множества A соответствует единственный элемент множества B, то можно утверждать, что данное отношение является функцией. Данная функция не является инъекцией, так как существуют различные элементы множества A, которым соответствует один и тот же элемент из B. Так, различным элементам a_2 и a_3 соответствует элемент b_2. Данная функция также не является сюръекцией, так как элемент b_3 не входит ни в одну упорядоченную пару.

1.22. Для ответа на вопрос задачи прежде всего необходимо проверить, является ли отношение R отображением. Так как каждый элемент x из A входит в пары вида (x, y) лишь один раз, можно утверждать, что мы имеем дело с отображением. Это отображение инъективно, так как для различных первых элементов пар $x1$, $x2$ вторые элементы этих пар также различны. Отображение R является сюръекцией, так как правая часть отношения R совпадает с множеством A. Таким образом, отношение R является инъективным и сюръективным отображением, следовательно, R — биекция.

1.23. Отношение R рефлексивно, так как две одинаковые книги содержат ссылки на одни и те же литературные источники. Данное отношение также симметрично, так как если в книгах a и b имеется ссылка на какой-либо литературный источник, то в книгах b и a, очевидно, есть ссылки на тот же литературный источник. Свойство транзитивности, вообще говоря, не выполняется, так как возможны случаи, когда книги a и b содержат ссылки на общие литературные источники, книги b и c также ссылаются на общие литературные источники, а книги a и c не имеют общих ссылок.

1.24. Это отношение, очевидно, рефлексивно и симметрично. Оно также транзитивно, так как если слова a и b начинаются с некоторой буквы x, слова b и c начинаются с некоторой буквы y, то очевидно, что $x = y$, следовательно, слова a и c начинаются с одной и той же буквы. Классы эквивалентности в данном случае представляют собой множества слов, начинающихся с одной и той же буквы.

1.25. Не является, так как одно и то же ключевое слово может содержаться на различных Web-страницах. Это говорит о том, что условие однозначности не выполняется.

1.26. Является, поскольку одна и та же книга не может иметь разные цены в одном магазине. Данная функция не является инъективной, так как две разные книги могут иметь одну и ту же цену. Эта функция является сюръективной, так как в магазине не может существовать книга без цены.

1.27. Данное отношение является функцией, так как каждому входящему документу однозначно соответствует его регистрационный номер. Эта функция является биекцией, так как каждому регистрационному номеру однозначно соответствует документ.

1.28. Остаток 2 имеет любое натуральное число, предшествующее натуральному числу, делящемуся на 3. Поставим каждому такому числу во взаимно-однозначное соответствие его порядковый номер. Имеем счетное множество натуральных чисел с остатком 2.

1.33. Данное множество континуально.

1.34. Данное множество счетно.

1.35. Данное множество континуально.

1.36. Можно.

1.37. Можно.

1.38. Данное множество континуально.

2.1

x	y	z	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

2.2

x	y	z	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

2.3

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

2.4

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

2.5

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

2.6

x	y	z	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

2.7

x	y	z	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

2.8

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

2.9

x	y	z	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

2.10

x	y	z	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

2.16. $x \& (\neg x \& y \vee z) \& (x \vee \neg z) = x \& (x \vee \neg z) \& (\neg x \& y \vee z) = x \& (\neg x \& y \vee z) = x \& \neg x \& y \vee x \& z = 0 \vee x \& z = x \& z.$

2.17 $(\neg x \vee y) \& (\neg y \vee x \& z) = \neg x \& \neg y \vee y \& \neg y \vee \neg x \& x \& z \vee y \& x \& z = \neg x \& \neg y \vee 0 \vee 0 \vee x \& y \& z = \neg x \& \neg y \vee x \& y \& z.$

2.18. $x \& (y \sim x) \& (\neg x \vee \neg z) = x \& (\neg x \vee z) \& (y \sim x) = (x \& \neg x \vee x \& \neg z) \& (x \& y \vee \neg x \& \neg y) = (0 \vee x \& \neg z) \& (x \& y \vee \neg x \& \neg y) = x \& \neg z \& (x \& y \vee \neg x \& \neg y) = x \& \neg z \& x \& y \vee x \& \neg z \& \neg x \& \neg y = x \& x \& y \& \neg z \vee x \& \neg x \& \neg y \& \neg z = x \& y \& \neg z \vee 0 = x \& y \& \neg z.$

2.19. $(x \rightarrow y) \& x \& \neg y = (\neg x \vee y) \& x \& \neg y = \neg x \& x \& \neg y \vee x \& \neg y \& y = 0 \vee 0 = 0.$

2.20. $(\neg x \,\&\, y) \to (z \,\&\, x) = \neg(\neg x \,\&\, y) \vee z \,\&\, x = (\neg(\neg x) \vee \neg y) \vee$ $\vee\, x \,\&\, z = x \vee \neg y \vee x \,\&\, z = (x \vee x \,\&\, z) \vee \neg y \;\; = x \vee \neg y.$

2.21. $(x \,\&\, y \sim z) \,\&\, x \,\&\, \neg z = (x \,\&\, y \,\&\, z \vee \neg(x \,\&\, y) \,\&$ $\&\, \neg z) \,\&\, x\& \,\neg z = x \,\&\, y \,\&\, z \,\&\, x \,\&\, \neg z \vee (\neg x \vee \neg y) \,\&\, \neg z \,\&$ $\&\, x \,\&\, \neg z = x \,\&\, x \,\&\, y \,\&\, z \,\&\, \neg z \vee \neg x \,\&\, \neg z \,\&\, x \,\&\, \neg z \vee \neg y \,\&\, \neg z \,\&$ $\&\, x \,\&\, \neg z = 0 \vee \neg x \,\&\, x \,\&\, \neg z \,\&\, \neg z \vee x \,\&\, \neg z \,\&\, \neg z \,\&$ $\&\, y = 0 \vee 0 \vee x \,\&\, y \,\&\, \neg z \;=\; x \,\&\, y \,\&\, \neg z.$

2.22. $(x \,\&z \vee \neg x \,\&\neg y) \,\&\, (z \to y) = (x \,\&\, z \vee \neg x \,\&\, \neg y) \,\&\, (\neg z \vee y) =$ $= x \,\&\, z \,\&\, \neg z \vee \neg x \,\&\, \neg y \,\&\, \neg z \vee x \,\&\, y \,\&\, z \vee \neg x \,\&\, \neg y \,\&\, y = 0 \vee \neg x \,\&$ $\&\, \neg y \,\&\, \neg z \vee x \,\&\, y \,\&\, z \vee 0 = x \,\&\, y \,\&\, z \vee \neg x \,\&\, \neg y \,\&\, \neg z.$

2.23. $(x \vee y \,\&\, \neg z \vee \neg x \,\&\, \neg y \,\&\, z) \,\&\, x \,\&\, \neg y = x \,\&\, x \,\&\, \neg y \vee x \,\&$ $\&\, \neg y \,\&\, y \,\&\, \neg z \vee x \,\&\, \neg y \,\&\, \neg x \,\&\, \neg y \,\&\, z = x \,\&\, \neg y \vee 0 \vee 0 = x \,\&\, \neg y.$

2.24. $(x \to y) \,\&\, (y \to x) = (\neg x \vee y) \,\&\, (\neg y \vee x) = \neg x \,\&\, \neg y \vee y \,\&$ $\&\, \neg y \vee \neg x \,\&\, x \vee y \,\&\, x = x \,\&\, y \vee \neg x \,\&\, \neg y = x \sim y.$

2.25. $(x \,\&\, \neg y \,\&\, z \vee \neg x \,\&\, \neg z) \,\&\, y = x \,\&\, \neg y \,\&\, z \,\&\, y \vee \neg x \,\&\, \neg z \,\&$ $\&\, y = 0 \vee \neg x \,\&\, \neg z \,\&\, y = \neg x \,\&\, y \,\&\, \neg z.$

2.26. $F(x, y, z) = \neg x \,\&\, \neg y \,\&\, \neg z \vee \neg x \,\&\neg y \,\&\, z \vee x \,\&\, \neg y \,\&\, z.$

2.27. $F(x, y, z) = \neg x \,\&\, \neg y \,\&\, \neg z \vee x \,\&\, \neg y \,\&\, \neg z \vee x \,\&\, \neg y \,\&\, z.$

2.28. $F(x, y, z) = \neg x \,\&\, y \,\&\, z.$

2.29. $F(x, y, z) = \neg x \,\&\, \neg y \,\&\neg z \vee x \,\&\, \neg y \,\&\, z.$

2.30. $F(x, y, z) = \neg x \,\&\, y \,\&\, z \vee x \,\&\, \neg y \,\&\, z \vee x \,\&\, y \,\&\, \neg z.$

2.31. $F(x, y, z) = \neg x \,\&\, \neg y \,\&\, \neg z \vee \neg x \,\&\, \neg y \,\&\, z \vee \neg x \,\&\, y \,\&\, \neg z.$

2.32. $F(x, y, z) = \neg x \,\&\, \neg y \,\&\, \neg z \vee \neg x \,\&\, y \neg z \vee \neg x \,\&\, y \,\&\, z \vee x \,\&$ $\&\, \neg y \,\&\, \neg z.$

2.33. $F(x, y, z) = \neg x \,\&\, \neg y \,\&\, z \vee \neg x \,\&\, y \,\&\, z \vee x \,\&\, \neg y \,\&\, z.$

2.34. $F(x, y, z) = x \,\&\, y\& \,\neg z \vee x \,\&\, y \,\&\, z.$

2.35. $F(x, y, z) = \neg x \,\&\, \neg y \,\&\, \neg z \vee \neg x \,\&\, y \,\&\, \neg z \vee x \,\&\, \neg y \,\&\, \neg z.$

2.36. $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 \le 25 = 1.$

2.37. $(x + 5)^2 + (y - 5)^2 \le 100 = 1.$

2.38. $(y \ge (15 - 5x) / 3) \,\&\, (y \ge (5x - 15) / 2) \,\&\, (y \le 5) = 1.$

2.39. Данный квадрат имеет вершины с координатами: (3.5, 3.5), (–3.5, 3.5), (–3.5, –3.5), (3.5, –3.5). Следовательно, решением будет $(-3.5 \le x \le 3.5) \,\&\, (-3.5 \le y \le 3.5) = 1.$

2.40. Прямоугольник может быть расположен в любом квадранте. Поэтому имеем

$(0 \le x \le 5) \,\&\, (0 \le y \le 10)\; V;$

$V\; (5 \le x \le 0) \,\&\, (0 \le y \le 10)\; V;$

$V\; (-5 \le x \le 0) \,\&\, (-10 \le y \le 0)\; V;$

$V\; (0 \le x \le 5) \,\&\, (-10 \le y \le 0) = 1.$

2.41. Данное кольцо ограничено окружностями: $x^2 + y^2 = 16$, $x^2 + y^2 = 36$. Следовательно, имеем решение: $(x^2 + y^2 \ge 16) \,\&$ $\&\, (x^2 + y^2 \le 36) = 1.$

2.42. $((x - 3)^2 + (y - 2)^2 \ge 16) \,\&\, ((x - 3)^2 + (y - 2)^2 \le 36) = 1.$

2.43. $(-1 \le x \le 1) \,\&\, (y \le x^2) = 1.$

2.44. $(0 \le x \le 5) \,\&\, (y \le x) = 1.$

2.45. $(0 \le x \le 5) \,\&\, (y \le x) = 1.$

2.46. На языке теории множеств доказательство может быть выполнено следующим образом.

Пусть некоторый элемент $x \in A \cap (A \cup B)$. Это означает, что этот элемент принадлежит одновременно множествам A и $A \cup B$, что, очевидно, предполагает его принадлежность множеству A. Значит, из того, что $x \in A \cap (A \cup B)$ следует $x \in A$. Предположим теперь, что $x \in A$. Тогда можно утверждать, что $x \in A \cup B$. Таким образом, из того, что $x \in A$, следует, что элемент x одновременно принадлежит множествам A и $A \cup B$. Мы показали, что утверждения $x \in A \cap (A \cup B)$ и $x \in A$ эквивалентны, следовательно, множества $A \cap (A \cup B)$ и A равны.

На языке теории доказательств построение можно выполнить так.

Пусть X — произвольное множество, $x \in X$. Построим предикат: $P(x \in X) = 1$ тогда и только тогда, когда $x \in X$. Затем имеем: $\forall x \in A \cap (A \cup B) \Leftrightarrow \forall x\ P(x \in A \cap (A \cup B)) = P(x \in A)\ \&$ $\&\ P(x \in (A \cup B)) = P(x \in A)\ \&\ (P(x \in A) \vee P(x \in B)) = P(x \in A) \vee$ $\vee\ P(x \in A)\ \&\ P(x \in B)$. Для того чтобы правая часть этого равенства имела истинное значение для любого x, достаточно потребовать: $P(x \in A) = 1$. Но тогда истинна и левая часть.

Имеем окончательно: $x \in A \cap (A \cup B)$: $x \in A$.

2.48. Пусть $x \in A \cup (B \cap C)$. Это означает, что x принадлежит хотя бы одному из множеств: A или $B \cap C$. Если этот элемент принадлежит множеству A, то он также принадлежит множествам $A \cup B$ и $A \cup C$. Если x принадлежит множеству $B \cap C$, то он принадлежит одновременно множествам B и C и, следовательно, множествам $A \cup B$ и $A \cup C$. Мы показали, что из того, что $x \in A \cup (B \cap C)$ следует $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Предположим теперь, что $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Это означает, что x одновременно принадлежит множествам $A \cup B$ и $A \cup C$, что влечет $x \in A$, и, очевидно, $x \in A \cup (B \cap C)$. Итак, из того, что $x \in (A \cup B) \cap$ $\cap (A \cup C)$, следует $x \in A \cup (B \cap C)$. Мы доказали, что утверждения $x \in A \cup (B \cap C)$ и $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ эквивалентны, следовательно, множества $A \cup (B \cap C)$ и $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ равны.

На языке теории доказательств построение можно выполнить так.

Пусть X — произвольное множество, $x \in X$. Построим предикат: $P(x \in X) = 1$, если и только если $x \in X$. Тогда имеем $\forall x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow \forall x\ \ P(x \in A \cup (B \cap C)) = P(x \in A) \vee P(x \in$ $\in (B \cap C)) = P(x \in A) \vee P(x \in B)\ \&\ P(x \in C)$. Используя закон дистрибутивности для дизъюнкции, получим

$$P(x \in A) \vee P(x \in B)\ \&\ P(x \in C) =$$
$$= (P(x \in A) \vee P(x \in B))\ \&\ (P(x \in A) \vee P(x \in C)) =$$
$$= P(x \in A \cup B)\ \&\ P(x \in A \cup C) = P(x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)).$$

Имеем окончательно: $x \in A \cup (B \cap C) : x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

2.50. Пусть $x \in I \setminus (A \cup B)$. Это говорит о том, что данный элемент не принадлежит объединению множеств A и B, что, в свою очередь, означает, что x не принадлежит ни множеству A, ни множеству B. Отсюда вытекает, что $x \in I \setminus A$ и $x \in I \setminus B$, откуда, очевидно, можно заключить, что $x \in (I \setminus A) \cap (I \setminus B)$. Мы показали, что из того, что $x \in I \setminus (A \cup B)$ следует $x \in (I \setminus A) \cap$ $\cap (I \setminus B)$. Пусть теперь $x \in (I \setminus A) \cap (I \setminus B)$. Тогда x является одновременно элементом множеств $I \setminus A$ и $I \setminus B$, откуда можно заключить, что x не принадлежит ни множеству A, ни множеству B. Таким образом, данный элемент не принадлежит множеству $A \cup B$, что, в свою очередь, означает, что x принадлежит множеству $I \setminus (A \cup B)$. Мы показали, что из того, что $x \in (I \setminus A) \cap (I \setminus B)$, следует $x \in I \setminus (A \cup B)$. Так как мы доказали, что утверждения $x \in (I \setminus A) \cap (I \setminus B)$ и $x \in I \setminus (A \cup B)$ эквивалентны, можно утверждать, что множества $(I \setminus A) \cap (I \setminus B)$ и $I \setminus (A \cup B)$ равны.

3.1. а) Поскольку всего имеется 7 каналов, то документ можно отправить из пункта A в пункт B семью различными способами. Столькими же способами можно отправить документ из пункта B в пункт A. Следовательно, всего существует 7×7 возможных маршрутов следования документа.

б) Из 49 маршрутов возможного следования документа следует исключить 7 маршрутов, для которых используется один и тот же канал связи. Ответ: $49 - 7 = 42$.

3.2. Первое место может получить одна из 16 команд. После того, как определено первое место, второе место может занять одна из 15 команд. Следовательно, общее число способов, которыми могут быть распределены первое и второе места, равно $16 \times 15 = 240$.

3.3. а) Первой цифрой числа может быть одна из 5 цифр 1, 2, 3, 4, 5 (0 не может быть первой цифрой, потому что в таком случае число не четырехзначное). Если первая цифра выбрана, то вторая может быть выбрана 5 способами, третья — 4 способами, четвертая — 3 способами. Согласно правилу умножения общее число способов равно $5 \times 5 \times 4 \times 3 = 300$.

б) Первой цифрой числа может быть одна из цифр 1, 2, 3, 4, 5 (5 возможностей), для каждой из следующих цифр имеем 6 возможностей (0, 1, 2, 3, 4, 5). Следовательно, число искомых чисел равно $5 \times 6 \times 6 \times 6 = 5 \times 6^3 = 1080$.

в) Первой цифрой может быть одна из цифр 1, 2, 3, 4, 5, а последней — одна из цифр 1, 3, 5 (числа должны быть нечетными). Следовательно, общее количество чисел равно $5 \times 6 \times 6 \times 3 = 540$.

3.4. 18000.

3.5. а) mn; б) $(m + 1)(n + 1)$.

3.6. 20.

3.7. 5^5.

3.8. Все таблицы, имеющие указанное в условии задачи свойство, можно составить следующим образом. Всюду, кроме последней строки и последнего столбца, произвольно выписываем $+1$ и -1. Это можно сделать $2^{(m-1)(n-1)}$ способами. Пусть p — произведение всех выписанных чисел. Теперь в каждой из первых $m-1$ строк на пересечении с $n-m$ столбцом выписываем $+1$ или -1 так, чтобы произведение чисел во всей строке было равно 1. Обозначим произведение чисел, которые будут выписаны в $n - m$ столбце, через x. Теперь в каждом из $n-1$ столбцов на пересечении с m-й строкой выпишем также $+1$ или -1 так, чтобы произведение в столбце было равно 1. Произведение чисел, которые будут выписаны в m-й строке, обозначим через y. Заметим, что x и y имеют одинаковые знаки. Действительно, $px = 1$, $py = 1$, и поэтому $p^2xy = 1$, и, значит, $xy > 0$. Выпишем на пересечении m-й строки и n-го столбца число 1 с тем же знаком, который имеют x и y. В результате мы составили таблицу, обладающую указанным свойством. Число всех таких таблиц равно $2^{(n-1)(m-1)}$.

3.9. Поскольку при копировании статьи из электронного каталога сама статья остается в библиотеке, возможно копирование одной и той же статьи несколько раз. С учетом этого факта искомое число комбинаций равно $10^3 = 1000$.

3.10. Как и в предыдущей задаче, при копировании электронного документа сам документ остается в папке. Следовательно, общее число возможных комбинаций равно $5^2 = 25$.

3.11. Искомое число способов равно числу способов упорядочения множества, состоящего из 5 элементов, т. е. $P_5 = 1 \cdot 2 \times \times 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

3.12. Четные числа можно расставить на местах с четными номерами (таких мест n) $n!$ способами; каждому способу размещения четных чисел на местах с четными номерами соответствует $n!$ способов размещения нечетных чисел на местах с нечетными номерами. Поэтому общее число перестановок указанного типа по правилу умножения равно $n! \cdot n! = (n!)^2$.

3.13. Определим число перестановок, в которых данные два элемента (книги) a и b стоят рядом. Могут быть следующие случаи: a стоит на первом месте, a стоит на втором месте, ..., a стоит на $(n-1)$-м месте, а b стоит правее a; число таких случаев равно $n-1$. Кроме того, a и b можно поменять местами, и, следовательно, существует $2(n-1)$ способов размещения a и b рядом. Каждому из этих способов соответствует $(n-2)!$ перестановок других элементов. Следовательно, число перестановок, в которых a и b стоят рядом, равно $2 \cdot (n-1) \cdot (n-2)! = 2 \cdot (n-1)!$. Поэтому искомое число перестановок равно $n! - 2 \cdot (n-1)! = =(n-1)! \cdot (n-2)$.

3.14. При указанном расположении ладей на каждой вертикали и каждой горизонтали стоит лишь одна ладья. Рассмотрим одно из таких положений ладей. Пусть a_1 — номер вертикали, в которой стоит ладья из первой горизонтали, a_2 — номер вертикали, в которой стоит ладья из второй горизонтали, ..., a_8 — номер вертикали, в которой стоит ладья из последней, восьмой горизонтали. Тогда $(a_1, a_2, ..., a_8)$ есть некоторая перестановка чисел 1, 2, ..., 8. Среди чисел $a_1, a_2, ..., a_8$ нет ни одной пары равных, иначе две ладьи попали бы в одну вертикаль. Следовательно, каждому расположению ладей соответствует определенная перестановка чисел 1, 2, ..., 8. Наоборот, каждой такой перестановке соответствует такое расположение ладей, при котором они не бьют друг друга. Следовательно, число искомых положений ладей равно $P_8 = 8! = 40320$.

3.15. Искомое число способов равно числу размещений из 25 по 4: $A_{25}^4 = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303600$.

3.16. Искомое число способов равно числу 4-элементных упорядоченных подмножеств (дни сдачи экзаменов) множества из 8 элементов, т. е. $A_8^4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$ способов. Если известно, что последний экзамен будет сдаваться на восьмой день, то число способов равно $4 \cdot A_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$.

3.17. $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ способов.

3.18. $A_5^4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ способов.

3.19. Если символы не повторяются, то существует $A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$ кодов. Однако, вообще говоря, символы могут повторяться, следовательно, к данному числу нужно прибавить 10 комбинаций, в которых на первом и втором местах стоят одни и те же символы. Имеем: $90 + 10 = 100$.

3.20. Искомое число способов равно числу трехэлементных подмножеств множества из 5 элементов: $C_5^3 = =5!/(3! \cdot 2!) = 10$.

3.21. Следует рассмотреть все возможные 3-элементные подмножества множества, состоящего из 7 элементов. Искомое число способов равно: $C_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5/(1 \cdot 2 \cdot 3) = 35$.

3.22. Сеансов связи было столько, сколько можно выделить 2-элементных подмножеств в множестве из n элементов, то есть $C_n^2 = n(n-1)/2$.

3.23. Каждой точке пересечения двух диагоналей соответствует 4 вершины n-угольника, а каждым 4 вершинам n-угольника соответствует 1 точка пересечения (точка пересечения диагоналей четырехугольника с вершинами в данных 4 точках). Поэтому число всех точек пересечения равно числу способов, которыми среди n вершин можно выбрать 4 вершины: $C_n^4 = n(n-1)\times$ $\times(n-2)(n-3)/(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) = n(n-1)(n-2)(n-3)/4$.

3.24. $C_n^2 = n(n-1)/2$.

3.25. а) C_n^2. б) C_n^3. в) Будем проводить прямые последовательно одну за другой. Заметим, что если проводить k-ю прямую, то общее количество частей плоскости увеличится на $(k-1)+1$, где $k-1$ — количество точек пересечения этой прямой с ранее проведенными прямыми. Отсюда следует, что если провести все n прямых, то общее количество частей плоскости увеличится на количество всех точек пересечения (их будет C_n^2) плюс количество самих прямых. Вначале была одна часть (вся плоскость). Поэтому после проведения n прямых получим $1 + C_n^2 + n =$ $= (n^2 + n + 2)/2$ частей. г) Представим себе, что мы построили окружность, охватывающую все ограниченные части плоскости. Из этой окружности будет выходить $2n$ лучей, которые разделят внешность окружности на $2n$ частей. Таким образом, количество неограниченных частей равно $2n$. Следовательно, ограниченных частей будет $1 + C_n^2 - n = (n^2 - 3n + 2)/2$.

3.26. $C_9^4 = 126$.

3.27. $C_{10}^4 = 210$.

3.28. Если не проведено ни одной диагонали, имеем одну часть. Будем последовательно проводить диагонали. Заметим, что после проведения каждой диагонали число частей увеличивается на единицу плюс количество точек пересечения с теми диагоналями, которые уже проведены. Поэтому число частей, которые получаются после проведения всех диагоналей, равно 1 плюс число точек пересечения плюс число всех диагоналей. Если никакие 3 диагонали не пересекаются в одной точке, число точек пересечения равно C_n^4. Число диагоналей равно $n(n-3)/2$, следовательно, общее число частей равно $1 + C_n^4 + n(n-3)/2 = (n-1)(n-2)(n^2-3n+12)/24$.

3.29. $C_6^4 = C_6^2 = 15$.

3.30. Производящей функцией данной последовательности является $A(s) = 1/(1-as)$. Тогда имеем $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n s^n = \dfrac{1}{1-as}$ (т. е. сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии); ряд в левой части сходится при $|as| < 1$.

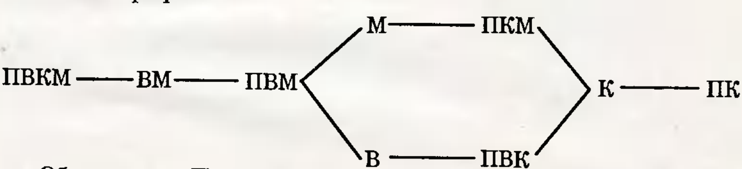
3.31. Производящая функция данной последовательности равна $A(s) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k s^k = (1+s)^n$.

3.32. $A(s) = \dfrac{1}{(1-s)^{n+1}}$. Это следует из равенства $\dfrac{1}{(1-x)^n} = 1 + C_n^1 x + C_{n+1}^2 x^2 + \ldots + C_{n+k-1}^k x^k + \ldots$, которое можно доказать, например, методом математической индукции.

3.33. Число всех таких сочетаний равно $C_{7+2-1}^2 = 8 \cdot 7/2 = 28$.

3.34. Число различных слов в данном случае равно $10!/(2! \times 3! \cdot 2!) = 151200$.

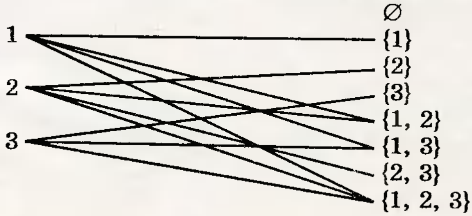
4.1. В качестве вершин будем брать комбинации объектов, находящихся на первом берегу. Первая комбинация — ПВКМ. Искомый граф:



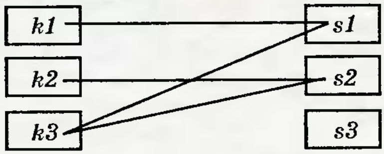
Обозначено: П — перевозчик; В — волк; К — коза; М — мешок с капустой.

4.2. Обозначим: $\{k8, k5, k3\}$ — множество, состоящее из кувшинов, емкостью 8, 5 и 3 литров соответственно, а числами на соответствующих местах — количество литров воды в каждом из этих кувшинов. Одно из решений задачи имеет вид: {8, 0, 0}, {5, 0, 3}, {5, 3, 0}, {2, 3, 3}, {2, 5, 1}, {7, 0, 1}, {7, 1, 0}, {4, 1, 3}, {4, 4, 0}.

4.3. Искомый граф представлен на рисунке ниже:



4.4. Этот граф должен иметь вид, изображенный на рисунке ниже:



4.6. Нет.

4.7. Поскольку из каждой вершины тетраэдра исходят три ребра, то степени всех вершин тетраэдра равны трем. В связи с тем, что каждая вершина куба инцидентна трем ребрам, то степени вершин куба также равны трем.

4.8. Сумма степеней всех вершин равна 18 — удвоенному числу ребер графа.

4.9. Один из вариантов матрицы смежности для тетраэдра:

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Матрица инцидентности для тетраэдра может выглядеть так:

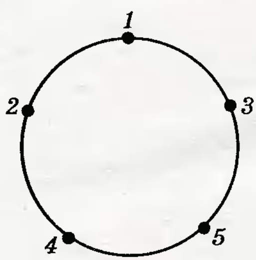
$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

4.10. Нет.

4.11. Четыре.

4.12. Перенумеровав вершины прямоугольника слева направо и сверху вниз, получим две цепи: <1,2,4,3> и <2,3,1,4>, которые покрывают граф.

4.13. Обозначим: *1* — хозяин, *2*, *3* — гости-мужчины, *4*, *5* — гости-женщины. Искомый граф может иметь следующий вид:



4.14. Один из вариантов решения задачи шахматного коня приведен ниже. Номера в клетках обозначают номера ходов. Начало обхода шахматной доски — из клетки $a1$.

56	41	58	35	50	39	60	33
47	44	55	40	59	34	51	38
42	57	46	49	36	53	32	61
45	48	43	54	31	62	37	52
20	5	30	63	22	11	16	13
29	64	21	4	17	14	25	10
6	19	2	27	8	23	12	15
1	28	7	18	3	26	9	24

4.15. Гамильтоновых циклов здесь столько же, сколько и всех перестановок чисел {1, 2, 3, 4} — т. е. 4!. Для их построения достаточно сгенерировать все 24 перестановки.

4.16. Всего можем иметь $5^{5-2} = 5^3 = 125$ различных деревьев. Следовательно, столько же каталогов.

4.17. Возможно два дерева минимальной стоимости:

{(1, 2), (2, 4), (2, 3)} и {(1, 3), (1, 2), (2, 4)}. В обоих случаях стоимость сооружения информационного канала равна 9 тыс. грн.

4.18. Нет.

4.19. Это число равно n.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куратовский К., Мостовский А.* Теория множеств. — М.: Мир, 1970.

2. *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1979.

3. *Глускин Л. М., Шварц В. Я., Шор Л. А.* Задачи и алгоритмы комбинаторики и теории графов. — Донецк: Вища школа, 1982.

4. *Липский В.* Комбинаторика для программистов. — М.: Мир, 1988.

5. *Оре О.* Теория графов. — М.: Наука, 1980.

Список дополнительной литературы по главам

К главе 1

6. *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. — М.: Наука, 1987

7. *Кановей В. Г.* Аксиома выбора и аксиома детерминированности. — М.: Наука, 1984.

8. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976.

9. *Френкель А. А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств. — М.: Наука, 1966.

10. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. — ОНТИ, 1937.

К главе 2

11. *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. — М.: Наука, 1974.

12. *Ершов Ю. Л., Палютин Е. А.* Математическая логика. — М.: Наука, 1979.

13. *Клини С.* Математическая логика. — М.: Наука, 1973.

14. *Новиков П. С.* Элементы математической логики. — М.: Наука, 1979.

15. *Шенфилд Д. Р.* Математическая логика. — М.: Мир, 1975.

К главе 3

16. *Виленкин Н. Я.* Комбинаторика. — М.: Наука, 1987.

17. *Постников М. М.* Магические квадраты. — М.: Наука, 1964.

18. *Райзер Дж.* Комбинаторная математика. — М.: Мир, 1966.

19. *Риордан Дж.* Введение в комбинаторный анализ. — Мир: 1963.

20. *Сачков В. Н.* Комбинаторные методы дискретной математики. — М.: Наука, 1977.

21. *Холл М.* Комбинаторика, — М.: Мир, 1966.

К главе 4

22. *Берж К.* Теория графов. — М.: Наука, 1973.

23. *Зыков А. А.* Теория конечных графов. — Новосибирск: Наука, 1969.

24. *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход. — М.: Мир, 1978.

25. *Харри Ф.* Теория графов. — М.: Наука, 1973.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

СОДЕРЖАНИЕ

Серия «Учебники»

Асеев Георгий Георгиевич
Абрамов Олег Мартович
Ситников Дмитрий Эдуардович

Дискретная математика

Учебное пособие

Ответственный редактор *Е. В. Бузаева*

Технический редактор *А. М. Спивак*

Редактор *С. Г. Веселова*

Корректор *М. В. Весновская*

Верстка *Е. С. Островский*

Лицензия ЛР № 065194 от 2 июня 1997 г.

Подписано в печать 20.08.2003 г.
Формат 84x108 1/32. Бумага тип № 2.
Гарнитура Journal. Печать высокая.

Тираж 5000 экз. Заказ № 1323.

Издательство «ФЕНИКС»
344002, г. Ростов н/Д, пер. Соборный, 17

«ТОРСИНГ»
61057, Украина, г. Харьков, ул. Сумская, 13

Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУИПП «Курск»
305007, г. Курск, ул. Энгельса, 109

Г.Г. Асеев, О.М. Абрамов,
Д.Э. Ситников

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ